

# Pruebas de Acceso para mayores de 25 años



## Matemáticas II EXAMEN C ANDALUCÍA



## CONVOCATORIA 2023



# INSTRUCCIONES

**Instrucciones:** a) Duración: **1 hora y 30 minutos**.

b) Tienes que **elegir únicamente tres** de entre los seis ejercicios propuestos.

c) Cada ejercicio se puntuará **de 0 a 10 puntos**. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.

e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.



**ÁNGEL CUESTA**

**Tu profesor en la red**

**SUSCRÍBETE**

©Angel Cuesta Arza

# VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Trigonometría básica.  
Teoría y ejercicios.



Factorización de polinomios.



Funciones lineales.



Ecuaciones irracionales



Funciones cuadráticas.



Exámenes de años anteriores



## EJERCICIO 1

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$  y comprueba el resultado.

**Solución:** Se aísla una raíz y se elevan ambos términos de la igualdad al cuadrado.  $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$

$$(\sqrt{6-2x})^2 = (\sqrt{3x-2} + 1)^2 \longrightarrow 6 - 2x = (\sqrt{3x-2})^2 + 2 \cdot \sqrt{3x-2} \cdot 1 + 1^2$$

$$6 - 2x = 3x - 2 + 2 \cdot \sqrt{3x-2} + 1 \longrightarrow 6 - 2x - 3x + 2 - 1 = 2 \cdot \sqrt{3x-2} \longrightarrow 7 - 5x = 2 \cdot \sqrt{3x-2}$$

Se elevan al cuadrado los dos términos de la igualdad.

$$(7 - 5x)^2 = (2 \cdot \sqrt{3x-2})^2 \longrightarrow 49 - 70x + 25x^2 = 4 \cdot (3x - 2) \longrightarrow 49 - 70x + 25x^2 = 12x - 8$$

$$25x^2 - 82x + 57 = 0 \quad \text{Se resuelve la ecuación de segundo grado.}$$

$$x = \frac{-(-82) \pm \sqrt{(-82)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 57}}{2 \cdot 25} = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 5700}}{50} = \frac{82 \pm 32}{50} = \begin{cases} x_1 = \frac{57}{25} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

## EJERCICIO 1

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$  y comprueba el resultado.

Se debe comprobar la validez de ambas soluciones sustituyendo en la ecuación original.  $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$

$$\text{Si } x = 1; \quad \sqrt{6-2 \cdot 1} = \sqrt{3 \cdot 1 - 2} + 1 \longrightarrow 2 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow 2 = 2 \quad \text{Solución válida.}$$

$$\text{Si } x = \frac{57}{25}; \quad \sqrt{6-2 \cdot \frac{57}{25}} = \sqrt{3 \cdot \frac{57}{25} - 2} + 1 \longrightarrow \sqrt{\frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} + 1 \longrightarrow \frac{6}{5} \neq \frac{16}{5} \quad \text{Solución NO válida.}$$

|                   |
|-------------------|
| Solución: $x = 1$ |
|-------------------|

b) [5 puntos] Halla un polinomio  $p(x)$  de segundo grado sabiendo que:  $p(0) = -10$ , es divisible por  $x - 5$  y el resto de dividirlo por  $x + 1$  es 12.

**Solución:** Se define un polinomio de segundo grado en función de sus coeficientes numéricos.  $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Se aplica el teorema del resto para calcular  $a, b$  y  $c$ .  $P(0) = -10$   $P(5) = 0$   $P(-1) = 12$

$$P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -10 \longrightarrow c = -10$$

$$P(5) = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 0 \longrightarrow 25a + 5b + c = 0 \xrightarrow{c = -10} 25a + 5b - 10 = 0 \longrightarrow 25a + 5b = 10$$

$$P(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 12 \longrightarrow a - b + c = 12 \xrightarrow{c = -10} a - b - 10 = 12 \longrightarrow a - b = 22$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:  $\begin{cases} 25a + 5b = 10 \\ a - b = 22 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5a + b = 2 \\ a - b = 22 \end{cases} + \text{Aplico el método de reducción.}$

$$\begin{array}{r} 5a + b = 2 \\ a - b = 22 \\ \hline 6a = 24 \end{array} \longrightarrow a = \frac{24}{6} = 4$$

$$a - b = 22 \longrightarrow 4 - b = 22 \longrightarrow b = -18$$

El polinomio pedido es:  $P(x) = 4x^2 - 18x - 10$

## EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Resuelve la inecuación  $\frac{x+5}{x-3} \leq 2$ .

**Solución:** Se debe dejar un cero en el lado derecho de la inecuación.

$$\frac{x+5}{x-3} - 2 \leq 0 \longrightarrow \frac{x+5-2 \cdot (x-3)}{x-3} \leq 0 \longrightarrow \frac{x+5-2x+6}{x-3} \leq 0 \longrightarrow \frac{-x+11}{x-3} \leq 0$$

$$-x+11=0 \longrightarrow x=11$$

$$x-3=0 \longrightarrow x=3 \quad \text{Se hace un estudio de signos con los ceros y los polos obtenidos.}$$

Para resolver la inecuación igualamos a cero el numerador y el denominador.

|                     |     |      |           |
|---------------------|-----|------|-----------|
| $-\infty$           | $3$ | $11$ | $+\infty$ |
| $\frac{-x+11}{x-3}$ | $-$ | $+$  | $-$       |

$$x \in (-\infty, 3) \cup [11, +\infty)$$

$$f(0) = \frac{-0+11}{0-3} = -\frac{11}{3} < 0 \quad f(4) = \frac{-4+11}{4-3} = 7 > 0$$

$$f(12) = \frac{-12+11}{12-3} = -\frac{1}{9} < 0$$

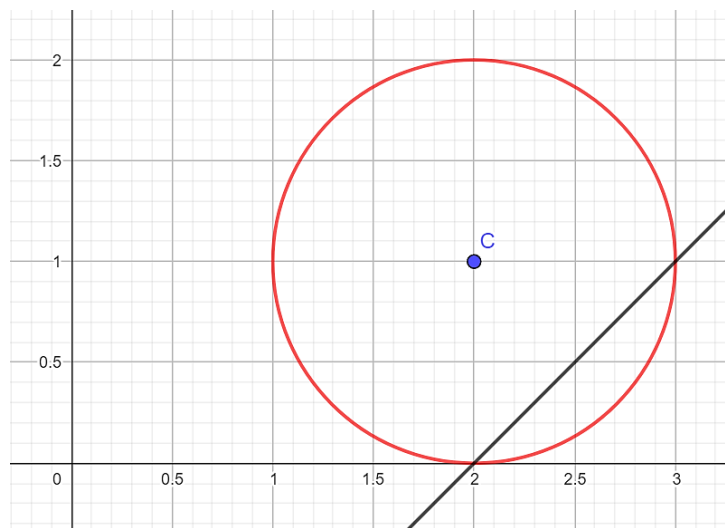
b) [5 puntos] Determina la posición relativa de la circunferencia de centro  $C(2,1)$  y radio 1 con la recta  $y - x + 2 = 0$ .

**Solución:** Se calcula la distancia que hay desde C a la recta dada.  $-x + y + 2 = 0 \rightarrow A = -1; B = 1; C = 2$

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 + 1 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dado que  $d < r$  podemos decir que la circunferencia y la recta son **secantes**.

Se aporta la representación gráfica con fines pedagógicos.



### EJERCICIO 3

a) [5 puntos] Resuelve la siguiente ecuación exponencial:  $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$ .

**Solución:** Debemos escribir todos los términos en función de  $5^x$ .

$$5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500 \longrightarrow 5^{2x} \cdot 5^1 - 5^x \cdot 5^2 = 2500 \longrightarrow 5 \cdot (5^x)^2 - 25 \cdot 5^x = 2500$$

Para resolver, haré un cambio de variable:  $t = 5^x \longrightarrow 5t^2 - 25t = 2500 \longrightarrow 5t^2 - 25t - 2500 = 0$

Y se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$t = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2500)}}{2 \cdot 5} \longrightarrow t = \frac{25 \pm \sqrt{50625}}{10} \longrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{25 + 225}{10} = 25 \\ t_2 = \frac{25 - 225}{10} = -20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 5^{x_1} = 25 \\ t_2 = 5^{x_2} = -20 \end{cases}$$

Y se deshace el cambio de variable.

$$5^{x_1} = 25 \longrightarrow 5^{x_1} = 5^2 \longrightarrow x_1 = 2$$

$$5^{x_2} = -20 \longrightarrow x_2 = \text{Log}_5(-20)$$

**No existe el valor del logaritmo de un número negativo.**

La solución de la ecuación es:  $x_1 = 2$

b) [5 puntos] Sabiendo que  $\cotg(\alpha) = -\frac{4}{3}$  y  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , halla  $\sen(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$  y  $\tg(\alpha)$ .

**Solución:** Se calcula el valor de la tangente de alfa a partir de la cotangente de alfa. A continuación, se calculan el resto de las razones trigonométricas pedidas. Debemos tener en cuenta que el ángulo pertenece al segundo cuadrante, por ello el signo del seno será positivo y el del coseno negativo.

$$\tg(\alpha) = \frac{1}{\cotg(\alpha)} = \frac{1}{-4/3} = -\frac{3}{4}$$

$$1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \longrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tg^2 \alpha} \longrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \tg^2 \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{16+9}{16}}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \longrightarrow \sen \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \xrightarrow{\sen \alpha > 0} \sen \alpha = \frac{3}{5}$$

Los valores pedidos son:  $\sen \alpha = \frac{3}{5}$   $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$   $\tg \alpha = -\frac{3}{4}$

## EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Sabiendo que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , resuelve la ecuación trigonométrica  $5\sec(x) - 4\cos(x) = 8$ .

**Solución:** Se expresa toda la ecuación en función del coseno de x.  $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$$\frac{5}{\cos(x)} - 4 \cdot \cos(x) = 8 \longrightarrow \frac{5 - 4 \cdot \cos^2 x}{\cos(x)} = \frac{8 \cdot \cos(x)}{\cos(x)} \longrightarrow 5 - 4 \cdot \cos^2 x = 8 \cdot \cos(x)$$

$-4 \cdot \cos^2 x - 8 \cdot \cos(x) + 5 = 0$  Se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$\cos(x) = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 5}}{2 \cdot (-4)} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{-8} = \frac{8 \pm 12}{-8} \longrightarrow \begin{cases} \cos(x_1) = \frac{8 + 12}{-8} = \frac{20}{-8} = -\frac{5}{2} \\ \cos(x_2) = \frac{8 - 12}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Solución} \\ \text{no válida} \end{array}$$

$$\cos(x_2) = \frac{1}{2} \longrightarrow x_2 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ rad}} x_2 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

La solución de la ecuación es:  $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

b) [5 puntos] Consideremos el triángulo de vértices  $A(1,2)$ ,  $B(-1,2)$  y  $C(1,4)$ . Halla la ecuación de la recta que pasa por el vértice  $A$  y por el punto medio del lado  $BC$ .

**Solución:** Se calcula el punto medio con la fórmula correspondiente.

$$M = \frac{B + C}{2} = \frac{(-1,2) + (1,4)}{2} = \frac{(0,6)}{2} = (0,3)$$

Calculo la pendiente entre los puntos  $A$  y  $M$  y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{3 - 2}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto  $A$ .

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A) \longrightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 1) \longrightarrow y - 2 = -x + 1 \longrightarrow y = -x + 3$$

La ecuación de la recta (en forma explícita) que pasa por  $A$  y  $M$  es:  $y = -x + 3$

### EJERCICIO 5

a) [5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2, \\ 2 - x & \text{si } x < 2, \end{cases}$  el eje OX y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$ .

**Solución:** Tenemos en cuenta que la función está definida a trozos. El área que nos piden está en el segundo de los trozos definidos. La expresión de la función es siempre positiva entre  $x=0$  y  $x=2$ , por lo que el área es igual a la integral de la función entre los límites dados.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2 - x)dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left( 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left( 2 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) = 2$$

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x)dx = \mathbf{2 \text{ unidades de área}}$$

b) [5 puntos] El perímetro de un rectángulo es de 24 cm y su altura mide 2 cm más que su base. Calcula las dimensiones del rectángulo.

**Solución:** Se hace un esquema de la situación y se plantea un sistema de ecuaciones para resolver el problema.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ y = 2 + x \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de igualación.

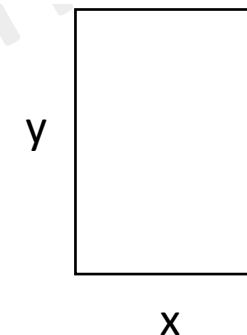
$$2x + 2y = 24 \longrightarrow x + y = 12 \longrightarrow y = 12 - x$$

$$y = 2 + x \longrightarrow 2 + x = 12 - x \longrightarrow 2x = 10 \longrightarrow x = 5$$

Se sustituye en la segunda ecuación, que tiene despejada y.

$$y = 2 + x = 2 + 5 = 7$$

La base mide **5 cm** y la altura **7 cm**.



## EJERCICIO 6

a) [5 puntos] Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$ .

**Solución:** Se calcula el valor del límite. Observamos que es una indeterminación del tipo “INFINITO MENOS INFINITO”.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \infty - \infty = \text{INDETERMINACIÓN}$  Se multiplica y divide por la expresión conjugada.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) \cdot (\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})}{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 1})^2 - (\sqrt{n^2 + 1})^2}{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1 - (n^2 + 1)}{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 - 1}{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{IND} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = -1}$$

**b) [5 puntos]** Halla  $a$  y  $b$  sabiendo que la gráfica de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  alcanza un punto crítico en  $(2, 3)$ . Comprueba que se trata de un mínimo relativo.

**Solución:** Se calcula en primer lugar la derivada de la función para poder aplicar la condición de que tiene un punto crítico en  $x = 2$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

Se aplican las condiciones del enunciado.

$$\text{Pasa por el punto } P(2,3) \quad f(2) = 3 \longrightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b = 3 \longrightarrow 8 + 4a + b = 3 \longrightarrow 4a + b = -5$$

$$\text{Extremo relativo en } x = 2 \quad f'(2) = 0 \longrightarrow 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a \cdot 2 = 0 \longrightarrow 12 + 4a = 0 \longrightarrow a = -3$$

$$\text{Se calcula } b, \text{ despejando de la primera ecuación. } 4 \cdot (-3) + b = -5 \longrightarrow -12 + b = -5 \longrightarrow b = 7$$

Por lo tanto,  **$a=-3$  y  $b=7$** .

Para comprobar que es un mínimo relativo, se calcula la segunda derivada.  $f''(x) = 6x + 2a = 6x - 6$

$$\text{Su sustituye } x = 2. \quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

Puesto que la segunda derivada es positiva, el punto crítico es un mínimo relativo.