

# INSTRUCCIONES

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
  - b) Debe elegir 3 de los 6 ejercicios propuestos.
  - c) Cada ejercicio se puntuará de 0 a 10. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
  - d) Identifique claramente los ejercicios elegidos. Conteste de forma razonada y escriba ordenadamente.
  - e) Puede usar calculadora (no programable) solo para las operaciones numéricas. No olvide que los procesos conducentes a la obtención de los resultados deben ser suficientemente justificados.



**ÁNGEL CUESTA**  
Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

©Angel Cuesta Arza

### Ejercicio 1.

- a) **(5 puntos)** Racionalice y simplifique la siguiente expresión  $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .
- b) **(5 puntos)** La capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> de ciertas plantas sigue una distribución Normal de media 35 y varianza 9. ¿Qué capacidad de absorción debe tener una de estas plantas, elegida al azar, para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>?

**Solución:** Se extrae el 2 de  $\sqrt{8}$ :  $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$  A continuación, se racionaliza cada expresión por separado.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{-1} = -3+2\sqrt{2}$$

Se operan las expresiones racionalizadas.

$$\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (-3 + 2\sqrt{2}) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El valor de la expresión simplificada es:  $3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

### Ejercicio 1.

- a) **(5 puntos)** Racionalice y simplifique la siguiente expresión  $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .
- b) **(5 puntos)** La capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> de ciertas plantas sigue una distribución Normal de media 35 y varianza 9. ¿Qué capacidad de absorción debe tener una de estas plantas, elegida al azar, para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>?

**Solución:** Defino la variable normal con la media y la desviación típica.  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \longrightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$

$X \sim N(35; 3)$  Siendo X la capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>.

Para que su capacidad de absorción esté entre el 65% con mayor capacidad:

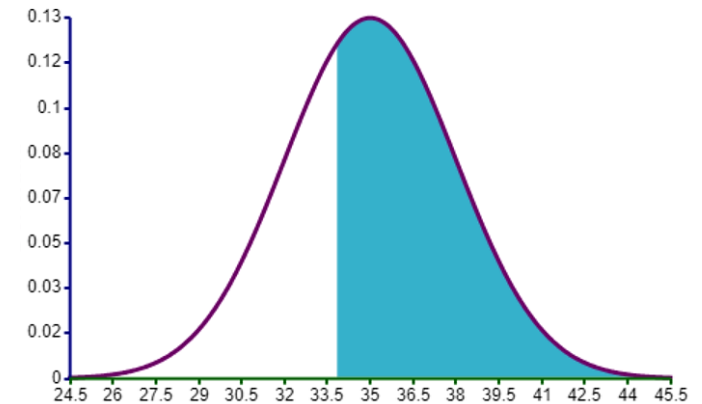
$$P(X > a) = 0,65 \longrightarrow P(X < a) = 0,35$$

Como nos han proporcionado en el examen una tabla que sólo toma valores positivos de la variable tipificada, debemos transformar la expresión para poder utilizar dicha tabla. Además, la tabla es la de cola a izquierda, de forma que nuestra expresión debe ser del tipo.

©Angel Cuesta Arza

$$P(X < a) = b; \text{siendo } b \geq 0,5$$

Se explica el proceso en la diapositiva siguiente.

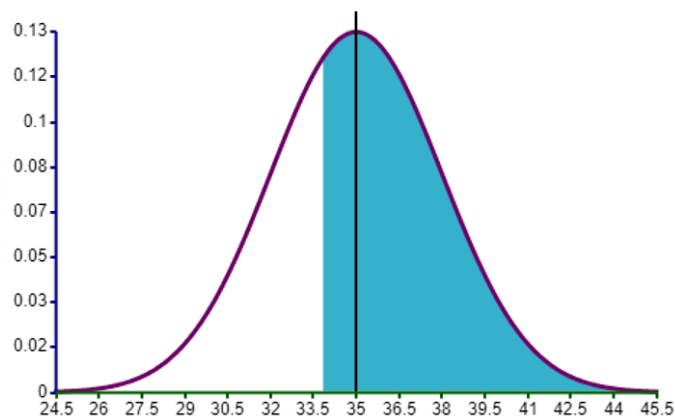


### Ejercicio 1.

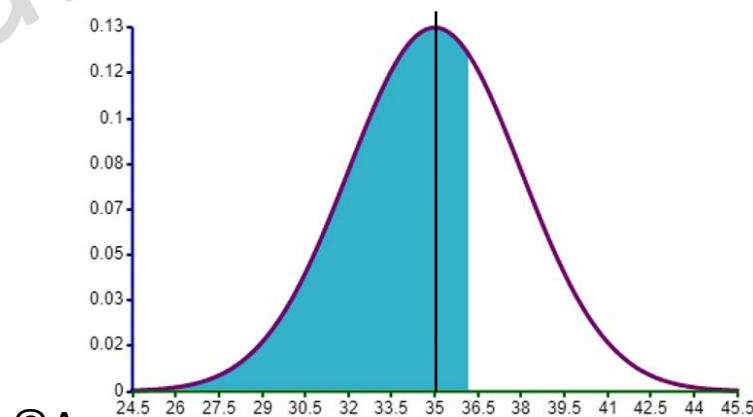
- a) **(5 puntos)** Racionalice y simplifique la siguiente expresión  $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .
- b) **(5 puntos)** La capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> de ciertas plantas sigue una distribución Normal de media 35 y varianza 9. ¿Qué capacidad de absorción debe tener una de estas plantas, elegida al azar, para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>?

Puesto que la función de densidad de la distribución normal es simétrica, podemos escribir que:

$$P(X > a) = 0,65 \longrightarrow P(X < -a) = 0,65$$



$$P(X > a) = 0,65$$



©Algebracuestia Alza

$$P(X < -a) = 0,65$$

Fíjate que el área coloreada es la misma. Dicha área es igual a 0,65.

En la siguiente diapositiva continúo.

### Ejercicio 1.

- a) **(5 puntos)** Racionalice y simplifique la siguiente expresión  $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .
- b) **(5 puntos)** La capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> de ciertas plantas sigue una distribución Normal de media 35 y varianza 9. ¿Qué capacidad de absorción debe tener una de estas plantas, elegida al azar, para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>?

$$P(X < -a) = 0,65 \quad \text{Se tipifica la variable.}$$

$$P\left(Z < \frac{-a - 35}{3}\right) = 0,65 \quad \text{Se calcula la inversa de la normal con ayuda de la tabla que nos proporcionan.}$$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |

©Angel Cuesta Arza

Podemos aproximar el valor de la variable tipificada a 0,385, que es el valor medio. Si quisiéramos tener más precisión, deberíamos hacer una interpolación lineal. En este caso, no vale la pena, pues 0,65 dista casi lo mismo de 0,6480 y 0,6517.

### Ejercicio 1.

- a) **(5 puntos)** Racionalice y simplifique la siguiente expresión  $\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .
- b) **(5 puntos)** La capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> de ciertas plantas sigue una distribución Normal de media 35 y varianza 9. ¿Qué capacidad de absorción debe tener una de estas plantas, elegida al azar, para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub>?

$$P\left(Z < \frac{-a - 35}{3}\right) = 0,65 \longrightarrow \frac{-a - 35}{3} = 0,385 \longrightarrow -a - 35 = 1,155 \longrightarrow a = 35 - 1,155 = 33,845$$

La capacidad de absorción que debe tener una de estas plantas para estar entre el 65% con mayor capacidad de absorción de CO<sub>2</sub> es **33,845**.

## Ejercicio 2.

- a) **(5 puntos)** El lunes gasté en el supermercado A un total de 10€ en la compra de piña y melón. La piña se vendía a un precio de 2€/kg y el melón a un precio de 3€/kg. Sin embargo, hoy he pagado 12€ por una compra con la misma cantidad de estas frutas en el supermercado B que tenía un precio de 1.8€ por kilo de piña y 3.7€ por kilo de melón. Calcule la cantidad de cada fruta que se compra.
- b) **(5 puntos)** En una progresión aritmética de diferencia 4, el término séptimo vale 32. ¿Cuánto vale el primer término de la progresión? ¿Y la suma de los 60 primeros términos?

**Solución:** Las incógnitas son  $x$ =kg de piña comprados;  $y$ =kg de melón comprados.

*“gasté en el supermercado A un total de 10 € en la compra de piña y melón”.*  $2x + 3y = 10$

*“hoy he pagado 12 € por la misma compra en el supermercado B”.*  $1,8x + 3,7y = 12$

Quedando el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 1,8x + 3,7y = 12 \end{cases}$$

Lo resolveré, en la siguiente diapositiva mediante el método de sustitución.

©Angel Cuesta Arza

## Ejercicio 2.

- a) **(5 puntos)** El lunes gasté en el supermercado A un total de 10€ en la compra de piña y melón. La piña se vendía a un precio de 2€/kg y el melón a un precio de 3€/kg. Sin embargo, hoy he pagado 12€ por una compra con la misma cantidad de estas frutas en el supermercado B que tenía un precio de 1.8€ por kilo de piña y 3.7€ por kilo de melón. Calcule la cantidad de cada fruta que se compra.
- b) **(5 puntos)** En una progresión aritmética de diferencia 4, el término séptimo vale 32. ¿Cuánto vale el primer término de la progresión? ¿Y la suma de los 60 primeros términos?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \longrightarrow y = \frac{10 - 2x}{3} \\ 1,8x + 3,7y = 12 \end{cases}$$
$$1,8x + 3,7 \cdot \left( \frac{10 - 2x}{3} \right) = 12 \longrightarrow 1,8x + \frac{37 - 7,4x}{3} = 12 \longrightarrow \frac{5,4x + 37 - 7,4x}{3} = \frac{36}{3}$$
$$5,4x + 37 - 7,4x = 36 \longrightarrow -2x = -1 \longrightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Se calcula el valor de y. Para ello se sustituye en la ecuación despejada inicialmente.

$$y = \frac{10 - 2x}{3} = \frac{10 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{10 - 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

**Compré 0,5 kg de piña y 3 kg de melón.**

## Ejercicio 2.

- a) **(5 puntos)** El lunes gasté en el supermercado A un total de 10€ en la compra de piña y melón. La piña se vendía a un precio de 2€/kg y el melón a un precio de 3€/kg. Sin embargo, hoy he pagado 12€ por una compra con la misma cantidad de estas frutas en el supermercado B que tenía un precio de 1.8€ por kilo de piña y 3.7€ por kilo de melón. Calcule la cantidad de cada fruta que se compra.
- b) **(5 puntos)** En una progresión aritmética de diferencia 4, el término séptimo vale 32. ¿Cuánto vale el primer término de la progresión? ¿Y la suma de los 60 primeros términos?

**Solución:** Las fórmulas de la progresión aritmética son:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$  **Término general.**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \text{Suma de n términos.}$$

Se sustituyen los datos en las fórmulas.

“... de diferencia 4, el término séptimo vale 32.”.  $a_7 = 32 = a_1 + (7 - 1) \cdot 4$

Se despeja el valor de  $a_1$ .  $32 = a_1 + 24 \longrightarrow a_1 = 8$

$$S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}) \cdot 60}{2} = \frac{(8 + 8 + (60 - 1) \cdot 4) \cdot 60}{2} = 7560$$

$$a_{60} = a_1 + (60 - 1) \cdot d = 8 + (60 - 1) \cdot 4$$

Los valores pedidos son:  $a_1 = 8$  y  $S_{60} = 7560$

### Ejercicio 3.

- a) **(5 puntos)** Sea la función  $f$  definida como  $f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x+b}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Calcule el valor de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y derivable en  $x = 0$ .
- b) **(5 puntos)** Derive la función  $g(x) = \ln(x^2 + x) + \frac{e^{x^2}}{e^{-x}}$ .

**Solución:** Se estudia la continuidad en el **punto de ruptura,  $x=0$** . En el resto de los valores de su dominio, la función es continua y derivable.

Calculo la imagen en  $x=0$ ;  $f(0) = 0 - a = -a$

Calculo el límite en  $x=0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x - a = 0 - a = -a$        $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + b}{x - 1} = \frac{2 \cdot 0 + b}{0 - 1} = -b$

Puesto que  $f(x)$  es continua:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \longrightarrow -a = -b \longrightarrow a = b$

Puesto que  $f(x)$  es continua en su dominio, estudio la derivabilidad de la función en  $x=0$ . Se calculan las derivadas laterales. Calculo primero la del trozo que es un cociente.

### Ejercicio 3.

a) **(5 puntos)** Sea la función  $f$  definida como  $f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x+b}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Calcule el valor de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y derivable en  $x = 0$ .

b) **(5 puntos)** Derive la función  $g(x) = \ln(x^2 + x) + \frac{e^{x^2}}{e^{-x}}$ .

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 1) - (2x + b) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - b}{(x - 1)^2} = \frac{-2 - b}{(x - 1)^2}$$

Ya podemos escribir  $f'(x)$  y calculamos las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-2 - b}{(x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = \frac{-2 - b}{(0 - 1)^2} = -2 - b \end{cases}$$

Puesto que la función es derivable:  $\overset{\text{©Angel Cuesta Arza}}{f'(0^-) = f'(0^+)} \longrightarrow 1 = -2 - b \longrightarrow b = -3$

Anteriormente habíamos visto que:  $a = b \longrightarrow a = -3$

|                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|
| Para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$ , $a = -3$ y $b = -3$ |
|-------------------------------------------------------------------------|

### Ejercicio 3.

a) **(5 puntos)** Sea la función  $f$  definida como  $f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x+b}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Calcule el valor de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y derivable en  $x = 0$ .

b) **(5 puntos)** Derive la función  $g(x) = \ln(x^2 + x) + \frac{e^{x^2}}{e^{-x}}$ .

**Solución:** Antes de derivar, aplico las propiedades de las potencias a la función dada.  $\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$

$$g(x) = \ln(x^2 + x) + \frac{e^{x^2}}{e^{-x}} = \ln(x^2 + x) + e^{x^2+x}$$

Aplico la regla de derivación de un logaritmo neperiano y la de la exponencial.

$$y = \ln(u) \rightarrow y' = \frac{u'}{u} \quad y = e^u \rightarrow y' = u' \cdot e^u$$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} + (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$$

©Angel Cuesta Arza

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} + (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$$

#### Ejercicio 4.

- a) **(5 puntos)** Obtenga el conjunto de soluciones de la inecuación  $2x + 3 - \frac{x+1}{3} \geq x + \frac{x+3}{2}$ .
- b) **(5 puntos)** Halle durante cuánto tiempo, expresado en días, presté un capital de 10000 € al 12% anual simple, si el interés recibido ha sido de 174.25€.

**Solución:** Se hace el mínimo común múltiplo en la inecuación de primer grado.

$$2x + 3 - \frac{x+1}{3} \geq x + \frac{x+3}{2} \longrightarrow \frac{6 \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (x + 1)}{6} \geq \frac{6x + 3 \cdot (x + 3)}{6}$$

$$6 \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (x + 1) \geq 6x + 3 \cdot (x + 3) \longrightarrow 12x + 18 - 2x - 2 \geq 6x + 3x + 9$$

$$12x - 2x - 6x - 3x \geq 9 - 18 + 2 \longrightarrow x \geq -7$$

**Solución:**  $x \in [-7, +\infty)$

©Angel Cuesta Arza

#### Ejercicio 4.

- a) **(5 puntos)** Obtenga el conjunto de soluciones de la inecuación  $2x + 3 - \frac{x+1}{3} \geq x + \frac{x+3}{2}$ .
- b) **(5 puntos)** Halle durante cuánto tiempo, expresado en días, presté un capital de 10000 € al 12% anual simple, si el interés recibido ha sido de 174.25€.

#### **Solución:**

Se aplica la fórmula del cálculo del interés cuando la capitalización es anual simple.  $I = C \cdot \frac{i}{100} \cdot t$

Se despeja el tiempo (que estará expresado en años):  $t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot i} = \frac{174,25 \cdot 100}{10000 \cdot 12} = 0,1452 \text{ años}$

Se multiplica por 365 para expresar en días.  $t = 0,1452 \cdot 365 = 53 \text{ días}$

El tiempo será **53 días**.

### Ejercicio 5.

- a) **(5 puntos)** En un tanque de la piscifactoría hay 8 doradas y 12 lubinas, se extraen sucesivamente al azar 10 peces (con reemplazamiento) y se anota la especie. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 6 lubinas?
- b) **(5 puntos)** Represente gráficamente esta función:  $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .

**Solución:** Estamos ante un ejercicio de distribución binomial. En el cual,  $n=10$ ,  $p=12/20$ ,  $q=8/20$ .

$X \sim B\left(20, \frac{12}{20}\right)$  Siendo X el número de lubinas capturadas.

Se calcula la probabilidad:

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{12}{20}\right)^6 \cdot \left(\frac{8}{20}\right)^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^4 \approx 0,2508$$

La probabilidad de extraer 6 lubinas, exactamente, es 0,2508.

### Ejercicio 5.

- a) **(5 puntos)** En un tanque de la piscifactoría hay 8 doradas y 12 lubinas, se extraen sucesivamente al azar 10 peces (con reemplazamiento) y se anota la especie. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 6 lubinas?
- b) **(5 puntos)** Represente gráficamente esta función:  $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .

### **Solución:**

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$9 - x^2 = 0 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3 \quad \text{lo cual implica que el Dominio es: } \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}}$$

Calculo los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{1}{9 - 0^2} = \frac{1}{9} \rightarrow \boxed{A = \left(0, \frac{1}{9}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{1}{9 - x^2} = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \quad \text{©Angel Guesta Arza}$$

$f(x)$  no tiene puntos de corte con el eje X.

### Ejercicio 5.

- a) **(5 puntos)** En un tanque de la piscifactoría hay 8 doradas y 12 lubinas, se extraen sucesivamente al azar 10 peces (con reemplazamiento) y se anota la especie. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 6 lubinas?
- b) **(5 puntos)** Represente gráficamente esta función:  $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores que están fuera del dominio. Sólo en ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos valores y lo comprobamos.

En  $x=-3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{0}$   $\longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$ , luego  $x = -3$  es A.V. de  $f(x)$

En  $x=3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{0}$   $\longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{9-x^2} = \frac{-1}{0^+} = +\infty \end{cases}$ , luego  $x = 3$  es A.V. de  $f(x)$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

### Ejercicio 5.

- a) **(5 puntos)** En un tanque de la piscifactoría hay 8 doradas y 12 lubinas, se extraen sucesivamente al azar 10 peces (con reemplazamiento) y se anota la especie. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 6 lubinas?
- b) **(5 puntos)** Represente gráficamente esta función:  $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

por consiguiente,  $y = 0$  es A. H. de  $f(x)$

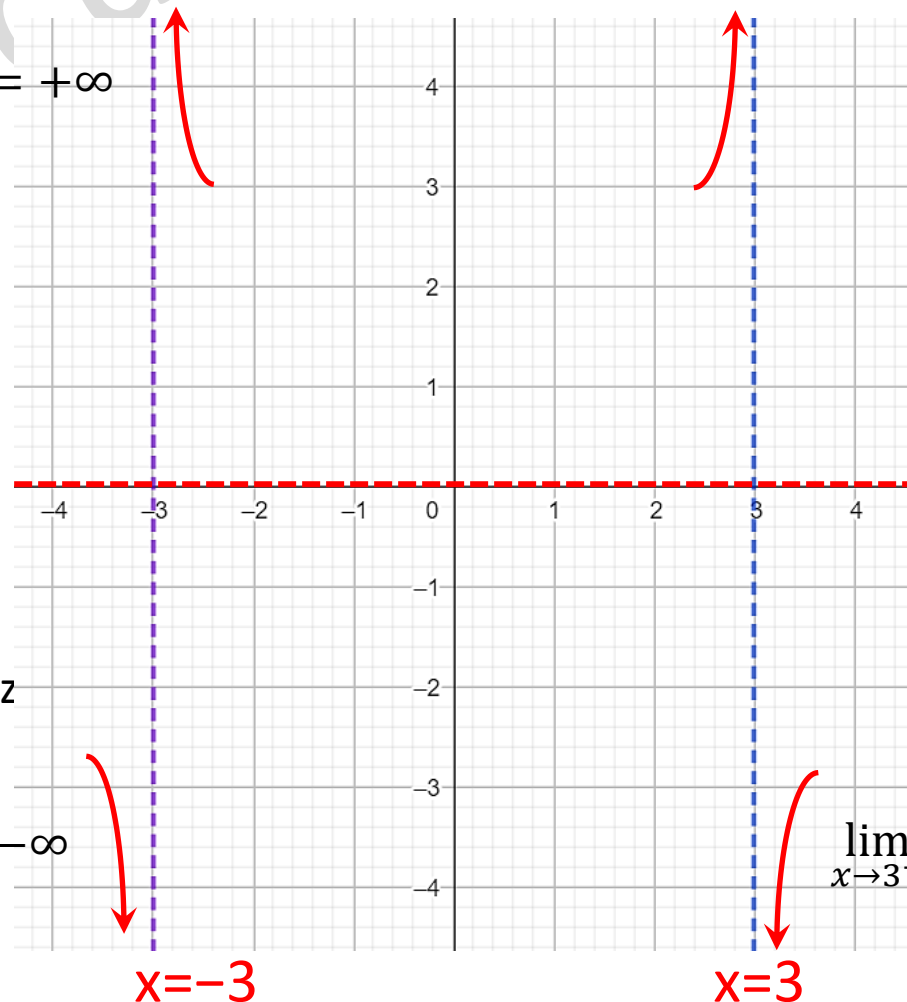
©Angel Cuesta Arz

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{9-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{9-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{9-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{9-x^2} = -\infty$$



### Ejercicio 5.

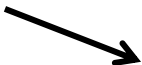
- a) **(5 puntos)** En un tanque de la piscifactoría hay 8 doradas y 12 lubinas, se extraen sucesivamente al azar 10 peces (con reemplazamiento) y se anota la especie. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 6 lubinas?
- b) **(5 puntos)** Represente gráficamente esta función:  $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .

Se calcula la derivada para estudiar la monotonía de la función y sus extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (9 - x^2) - 1 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{2x}{(9 - x^2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:  $\frac{2x}{(9 - x^2)^2} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Se estudia el signo de la derivada:

|         |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|         | $-\infty$                                                                           | $-3$                                                                                | $0$                                                                                 | $3$                                                                                 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$                                                                                 | $-$                                                                                 | $+$                                                                                 | $+$                                                                                 |           |
| $f(x)$  |  |  |  |  |           |

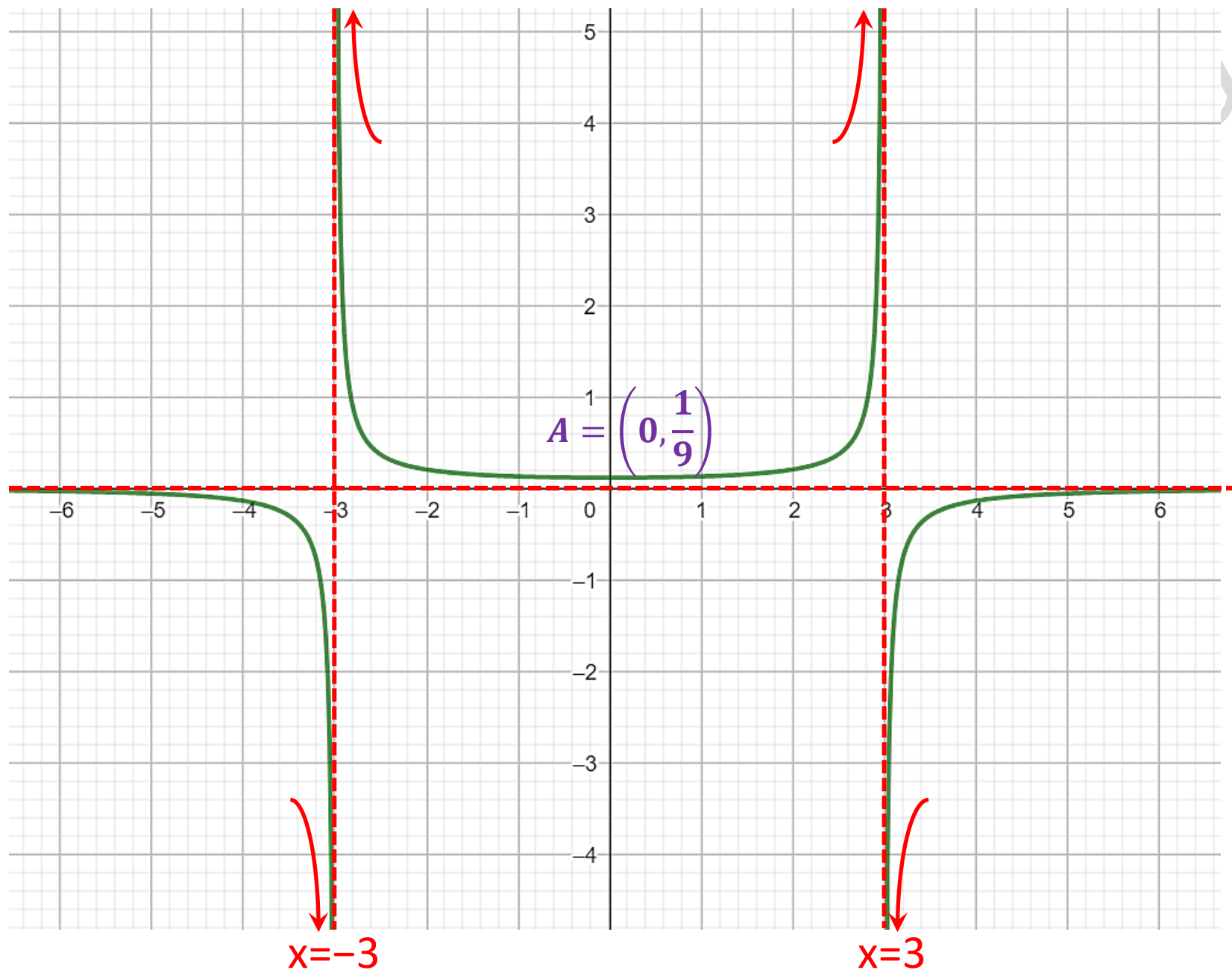
Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en  $x=0$ .

Se sustituye el valor de  $x=0$  en la función para obtener la imagen.

$$f(0) = \frac{1}{9 - 0^2} = \frac{1}{9}$$

©Angel Cuesta Arza  
Las coordenadas del mínimo relativo son:

$$\left(0, \frac{1}{9}\right)$$



Si lo necesitas puedes dar valores a la función para afinar la representación gráfica.

### Ejercicio 6.

Tras los estudios realizados en una cadena comercial, se sospecha que el número de clientes que acuden diariamente a sus centros comerciales está linealmente relacionado con la distancia, en kilómetros, a la que se sitúa de un núcleo de población. Los datos obtenidos se muestran en la tabla:

|                       |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| X:cientos de clientes | 10 | 8  | 7  | 6  | 4  | 2  | 1  |
| Y:distancia (kms)     | 15 | 18 | 25 | 20 | 26 | 40 | 32 |

- a) **(5 puntos)** Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.
- b) **(5 puntos)** Si el centro comercial se sitúa a 2km, ¿cuántos clientes puede esperar?

**Solución:** Para resolver este ejercicio hay que calcular la recta de regresión que relaciona la variable cientos de clientes (x) con la variable distancia (y). Se toman las variables tal como sugiere el ejercicio.

Este proceso puede hacerse directamente con la calculadora. Pero como hay que explicar el procedimiento, en la siguiente diapositiva indican todos los cálculos que hay que hacer.

Se completa la tabla para poder calcular las desviaciones típicas de **x** e **y**, y la covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{38}{7} = 5,43 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{176}{7} = 25,14$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{270}{7} - (5,43)^2} \approx 3,02$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{4874}{7} - (25,14)^2} \approx 8,00$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{805}{7} - 5,43 \cdot 25,14 \approx -21,5$$

| x         | y          | x <sup>2</sup> | y <sup>2</sup> | x·y        |
|-----------|------------|----------------|----------------|------------|
| 10        | 15         | 100            | 225            | 150        |
| 8         | 18         | 64             | 324            | 144        |
| 7         | 25         | 49             | 625            | 175        |
| 6         | 20         | 36             | 400            | 120        |
| 4         | 26         | 16             | 676            | 104        |
| 2         | 40         | 4              | 1600           | 80         |
| 1         | 32         | 1              | 1024           | 32         |
| <b>38</b> | <b>176</b> | <b>270</b>     | <b>4874</b>    | <b>805</b> |

Se calcula el coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-21,5}{3,02 \cdot 8} \approx \boxed{-0,89}$$

**La correlación lineal entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a -1. Además, al ser negativo me indica que, a menor número de clientes, mayor distancia de estos al centro comercial.**

### Ejercicio 6.

Tras los estudios realizados en una cadena comercial, se sospecha que el número de clientes que acuden diariamente a sus centros comerciales está linealmente relacionado con la distancia, en kilómetros, a la que se sitúa de un núcleo de población. Los datos obtenidos se muestran en la tabla:

|                       |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| X:cientos de clientes | 10 | 8  | 7  | 6  | 4  | 2  | 1  |
| Y:distancia (kms)     | 15 | 18 | 25 | 20 | 26 | 40 | 32 |

- a) **(5 puntos)** Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.
- b) **(5 puntos)** Si el centro comercial se sitúa a 2km, ¿cuántos clientes puede esperar?

Calculo la recta de regresión de X sobre Y, ya que dispongo del valor de Y para estimar el valor de X (ojo a esto):

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} \cdot (y - \bar{y})$$

Sustituimos los valores obtenidos anteriormente.  $x - 5,43 = \frac{-21,5}{8^2} \cdot (y - 25,14) \rightarrow x - 5,43 = -0,336 \cdot (y - 25,14)$

$$x - 5,43 = -0,336y + 8,45 \rightarrow x = -0,336y + 13,88$$

Se estima el valor de x a partir de y=2 km.

$$x = -0,336 \cdot 2 + 13,88 = 13,2 \text{ cientos de clientes}$$

©Angel Cuesta Arza

El número de clientes estimado es de unos **1320 clientes**.