

# Pruebas de Acceso para mayores de 25 años



## Matemáticas II EXAMEN A ANDALUCÍA



## CONVOCATORIA 2022



# INSTRUCCIONES

**Instrucciones:** a) Duración: **1 hora y 30 minutos**.

b) Tienes que **elegir únicamente tres** de entre los seis ejercicios propuestos.

c) Cada ejercicio se puntuará **de 0 a 10 puntos**. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.

e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.



**ÁNGEL CUESTA**

**Tu profesor en la red**

**SUSCRÍBETE**

©Angel Cuesta Arza

# VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Trigonometría básica.  
Teoría y ejercicios.



Aprende a estudiar.



Funciones lineales.



Factorización de polinomios.



Funciones cuadráticas.



### EJERCICIO 1

a) [5 puntos] Determina el cociente y el resto de dividir el polinomio  $3x^3 - 1$  entre  $x^2 + x + 1$ .

b) [5 puntos] Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x) = 4x - \frac{4}{3}x^3$ .

**Solución:** Se aplica el algoritmo de la división.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + x + 1 \\ -3x^3 - 3x^2 - 3x & \\ \hline -3x^2 - 3x - 1 & \\ 3x^2 + 3x + 3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

*Cociente:*  $C(x) = 3x - 3$

*Resto:*  $R(x) = 2$

## EJERCICIO 1

a) [5 puntos] Determina el cociente y el resto de dividir el polinomio  $3x^3 - 1$  entre  $x^2 + x + 1$ .

b) [5 puntos] Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x) = 4x - \frac{4}{3}x^3$ .

**Solución:** Por ser un polinomio, el dominio de la función son todos los números reales.

Para estudiar la monotonía de la función se hace un estudio de signos de la derivada.  $f'(x) = 4 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 = 4 - 4x^2$

Se resuelve la ecuación que iguala la derivada a cero.  $4 - 4x^2 = 0 \longrightarrow -4x^2 = -4 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
|         | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ |      | $+$ |     | $-$ |           |
| $f(x)$  |           |     |      |     |     |     |           |

$$f'(-2) = 4 - 4 \cdot (-2)^2 = -12 < 0$$

$$f'(0) = 4 - 4 \cdot (0)^2 = 4 > 0$$

$$f'(2) = 4 - 4 \cdot (2)^2 = -12 < 0$$

$f(x)$  es creciente en :  $x \in (-1, 1)$

$f(x)$  es decreciente en :  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

## EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Sea  $\alpha$  un ángulo tal que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Halla el valor de  $\operatorname{sen}(\alpha)$ .

b) [5 puntos] Calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$ .

**Solución:** Se calcula el valor del seno de alfa a partir de las relaciones correspondientes. Debemos tener en cuenta que el ángulo pertenece al primer cuadrante, por ello el signo del seno será positivo.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \longrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \longrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{16}}}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{16+2}{16}}} = \pm \sqrt{\frac{16}{18}} = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \longrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha > 0} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$$

El valor pedido es:  **$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$**

## EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Sea  $\alpha$  un ángulo tal que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Halla el valor de  $\operatorname{sen}(\alpha)$ .

b) [5 puntos] Calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$ .

**Solución:** Se calcula el valor del límite. Observamos que es una indeterminación del tipo “INFINITO MENOS INFINITO”.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \infty - \infty = \text{INDETERMINACIÓN}$  Se multiplica y divide por la expresión conjugada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 4n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 4n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n})^2 - n^2}{(\sqrt{n^2 + 4n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n - n^2}{(\sqrt{n^2 + 4n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{(\sqrt{n^2 + 4n} + n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{(\sqrt{n^2} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{(n + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2$$

### EJERCICIO 3

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $4 \log\left(\frac{x}{3}\right) + \log\left(\frac{81}{4}\right) = 2 \log(x)$  y comprueba el resultado. ( $\log(x)$  representa al logaritmo decimal del número positivo  $x$ ).

b) [5 puntos] Calcula  $\int_0^1 (2x^3 - 4x^5 + 6\sqrt{x}) dx$ .

**Solución:** Se aplican las propiedades de los logaritmos.

$$4 \cdot \log\left(\frac{x}{3}\right) + \log\left(\frac{81}{4}\right) = 2 \log(x) \xrightarrow{A \cdot \log(B) = \log(B)^A} \log\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \log\left(\frac{81}{4}\right) = \log x^2$$

$$\log\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \log\left(\frac{81}{4}\right) = \log x^2 \xrightarrow{\log(A) + \log(B) = \log(A \cdot B)} \log\left(\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{81}{4}\right)\right) = \log x^2$$

**FUNCIÓN  
INYECTIVA**

$$\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{81}{4}\right) = x^2 \longrightarrow \frac{x^4}{81} \cdot \frac{81}{4} = x^2 \longrightarrow \frac{x^4}{4} = x^2 \longrightarrow x^4 = 4x^2 \longrightarrow x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Sólo es posible solución válida  $x=2$ , ya que  $x>0$ . La compruebo a continuación.

### EJERCICIO 3

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación  $4 \log\left(\frac{x}{3}\right) + \log\left(\frac{81}{4}\right) = 2 \log(x)$  y comprueba el resultado. ( $\log(x)$  representa al logaritmo decimal del número positivo  $x$ ).

b) [5 puntos] Calcula  $\int_0^1 (2x^3 - 4x^5 + 6\sqrt{x}) dx$ .

Se sustituye en la ecuación inicial el valor de  $x$  igual a 2.  $4 \cdot \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{81}{4}\right) = 2 \log(2) \longrightarrow 0'6021 = 0'6021$

Por lo tanto,  **$x=2$**  es la solución de la ecuación.

La integral es inmediata, por lo que se integrará cada sumando de forma directa. Excepto la raíz cuadrada que la expresaré en forma de potencia para poder integrarla. Finalmente se aplicará la regla de Barrow.

$$\int_0^1 (2x^3 - 4x^5 + 6x^{\frac{1}{2}}) dx = \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{4x^6}{6} + \frac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[ \frac{x^4}{2} - \frac{2x^6}{3} + 4x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$
$$\int_0^1 (2x^3 - 4x^5 + 6x^{\frac{1}{2}}) dx = \left( \frac{1^4}{2} - \frac{2 \cdot 1^6}{3} + 4 \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right) - \left( \frac{0^4}{2} - \frac{2 \cdot 0^6}{3} + 4 \cdot 0^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{23}{6}$$

Por lo tanto, el valor de la integral es  **$23/6$** .

#### EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Dados los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(-1, -2)$ , calcula la distancia entre  $A$  y  $B$ . Determina la ecuación de la recta que pasa por ellos.

b) [5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$  si  $x \neq 4$ .

**Solución:** La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector:  $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -2) - (-2, 3) = (1, -5)$

Y su módulo:  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$

La distancia entre los puntos A y B es  $\sqrt{26}$  unidades.

Calculo la pendiente entre los puntos A y B y después la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 3}{-1 - (-2)} = \frac{-5}{1} = -5$$

Utilizo la ecuación punto pendiente, tomando como punto por el que pasa la recta, el punto A.

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \longrightarrow y - 3 = -5 \cdot (x - (-2)) \longrightarrow y - 3 = -5x - 10 \longrightarrow y = -5x - 7$$

La ecuación de la recta (en forma explícita) que pasa por A y B es:  $y = -5x - 7$

#### EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Dados los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(-1, -2)$ , calcula la distancia entre  $A$  y  $B$ . Determina la ecuación de la recta que pasa por ellos.

b) [5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$  si  $x \neq 4$ .

**Solución:** Puesto que  $f(x)$  no está definida en  $x=4$ , debo estudiar si  $x=4$  es asíntota vertical de  $f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{4 - 4} = \frac{14}{0} \quad \text{Debo calcular los límites laterales.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{14}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{14}{0^-} = -\infty \quad \boxed{x=4 \text{ es asíntota vertical de } f(x).}$$

Calcularé si hay **asíntota horizontal**.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINACIÓN}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

**y=3** es asíntota horizontal de  $f(x)$ .

### EJERCICIO 5

a) [5 puntos] Halla el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}}$ .

b) [5 puntos] Un rectángulo tiene 14 m de perímetro y 12 m<sup>2</sup> de área. Calcula la longitud de sus lados.

**Solución:** Para que  $f(x)$  esté definida debe cumplirse:  $\frac{x+3}{x^3+x^2-2x} \geq 0$

Para resolver la inecuación igualamos a cero el numerador y el denominador.

$$x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases}$$

Se hace un estudio de signos con los ceros y los polos obtenidos.

### EJERCICIO 5

a) [5 puntos] Halla el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}}$ .

b) [5 puntos] Un rectángulo tiene  $14\text{ m}$  de perímetro y  $12\text{ m}^2$  de área. Calcula la longitud de sus lados.

Hago un estudio de signos de la función para estudiar el dominio.

|                          |      |      |     |     |           |
|--------------------------|------|------|-----|-----|-----------|
| $-\infty$                | $-3$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}$ | +    | -    | +   | -   | +         |

$$f(-4) = \frac{-4+3}{(-4)^3+(-4)^2-2 \cdot (-4)} = \frac{1}{40} > 0 \quad f(2) = \frac{2+3}{(2)^3+(2)^2-2 \cdot (2)} = \frac{5}{8} > 0$$

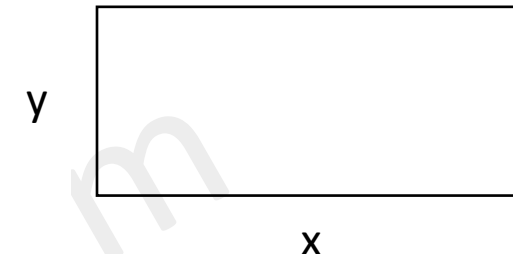
$$f(-2'5) = \frac{-2'5+3}{(-2'5)^3+(-2'5)^2-2 \cdot (-2'5)} \approx -0'11 < 0$$

$$f(-1) = \frac{-1+3}{(-1)^3+(-1)^2-2 \cdot (-1)} = 1 > 0$$

$$f(0'5) = \frac{0'5+3}{(0'5)^3+(0'5)^2-2 \cdot (0'5)} = -5'6 < 0$$

$$\text{Dom } f(x) = x \in (-\infty, -3] \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$$

### EJERCICIO 5



a) [5 puntos] Halla el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^3+x^2-2x}}$ .

b) [5 puntos] Un rectángulo tiene  $14\text{ m}$  de perímetro y  $12\text{ m}^2$  de área. Calcula la longitud de sus lados.

**Solución:** Se hace un esquema de la situación y se plantea un sistema de ecuaciones para resolver el problema.

$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$  Se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal por el método de sustitución. Se despeja de la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \longrightarrow x + y = 7 \longrightarrow y = 7 - x \longrightarrow x \cdot (7 - x) = 12 \longrightarrow 7x - x^2 = 12 \longrightarrow -x^2 + 7x - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{7 \pm 1}{-2} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7 + 1}{-2} = 3 \\ x_2 = \frac{-7 - 1}{-2} = 4 \end{cases}$$

Se calculan los valores de  $y$ :  $\begin{cases} y_1 = 7 - x_1 \\ y_2 = 7 - x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 7 - 3 = 4 \\ y_2 = 7 - 4 = 3 \end{cases}$

Los lados miden **3 y 4 m**. Da igual cual sea la base y cual sea la altura.

## EJERCICIO 6

a) [5 puntos] Halla los puntos de corte de la recta  $y = x$  y la circunferencia de centro  $(1, 0)$  y radio 1.

b) [5 puntos] Calcula el coeficiente de  $x^5y$  en el desarrollo de  $(x - 2y)^6$ .

**Solución:** Se escribe la ecuación de la circunferencia y se resuelve el sistema de ecuaciones que forma con la ecuación de la recta.

La ecuación general de una circunferencia es:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  siendo: Centro=(a,b) y el radio=r.

Quedando el sistema: 
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1^2 \\ y = x \end{cases}$$
 Se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal por el método de sustitución.

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1^2 \\ y = x \end{cases} \longrightarrow (x - 1)^2 + x^2 = 1 \longrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 1 \longrightarrow 2x^2 - 2x = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado.  $2x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (2x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

Puesto que  $y=x$ , ya puedo dar los puntos de corte:  $A = (0,0)$  y  $B = (1,1)$

### EJERCICIO 6

a) [5 puntos] Halla los puntos de corte de la recta  $y = x$  y la circunferencia de centro  $(1, 0)$  y radio 1.

b) [5 puntos] Calcula el coeficiente de  $x^5y$  en el desarrollo de  $(x - 2y)^6$ .

**Solución:** Se escribe el desarrollo del binomio elevado a la sexta. El segundo término es el que necesitamos. Hago el desarrollo completo con fines pedagógicos.

$$(x - 2y)^6 = \binom{6}{0} \cdot x^6 \cdot (-2y)^0 + \binom{6}{1} \cdot x^5 \cdot (-2y)^1 + \binom{6}{2} \cdot x^4 \cdot (-2y)^2 + \binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot (-2y)^3 + \binom{6}{4} \cdot x^2 \cdot (-2y)^4 + \binom{6}{5} \cdot x^1 \cdot (-2y)^5 + \binom{6}{6} \cdot x^0 \cdot (-2y)^6$$

$$(x - 2y)^6 = 1 \cdot x^6 \cdot 1 - 6 \cdot x^5 \cdot 2y + 15 \cdot x^4 \cdot 4y^2 - 20 \cdot x^3 \cdot 8y^3 + 15 \cdot x^2 \cdot 16y^4 - 6 \cdot x \cdot 32y^5 + 1 \cdot 1 \cdot 64y^6$$

$$(x - 2y)^6 = x^6 - 12 \cdot x^5 \cdot y + 60 \cdot x^4 \cdot y^2 - 160 \cdot x^3 \cdot y^3 + 240 \cdot x^2 \cdot y^4 - 192 \cdot x \cdot y^5 + 64y^6$$

Como puede verse, el coeficiente del término pedido es: **-12**