PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

MADRID

MATEMÁTICAS

MAYO 2022

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Operaciones con matrices. Ecuaciones matriciales.

Problema de sistemas de ecuaciones. 3 incógnitas.

Análisis de funciones. Monotonía. Áreas.

Probabilidad. Diagrama de árbol. Binomial.

VÍDEOS RECOMENDADOS

Para tu preparación es muy importante conocer el temario que entra en el examen.

En este vídeo podrás ver cuales son los principales puntos del temario.

Nuevo temario de la prueba para el acceso a los grados superiores de Madrid.

Ejercicio 1

NOTA SOBRE ESTE EJERCICIO.

ESTE EJERCICIO DE OPERACIONES CON MATRICES ES MUY HABITUAL EN OTROS EXÁMENES DE PAU DE OTRAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS.

PUEDEIS ENCONTRAR RESUELTOS EN MI CANAL EJERCICIOS PARECIDOS.
EL RESTO DEL EXAMEN ES TAMBIÉN INTERESANTE PARA VOSOTROS.

Ejercicio 1: 1:14-6:35

PAU Julio 2021,
Problema 2

PAU Septiembre 2020
Problema 4

PAU Julio 2020
Problema 4

Ejercicio 1

1) **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

   a) Calcule la matriz $A^2 + B$

   b) Calcule la matriz inversa de A

   c) Calcule la matriz X de dimensión 2x2 que verifique AX=B

Solución:

Calculo en primer lugar A^2. $\quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

Calculo A^2+B. $\quad A^2 + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}}$

Se calcula la matriz inversa utilizando el método de los adjuntos (también puedes utilizar otros).
El ejercicio se hace en la diapositiva siguiente.

Ejercicio 1

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A^2 + B$

b) Calcule la matriz inversa de A

c) Calcule la matriz X de dimensión 2x2 que verifique AX=B

Solución:

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Solución:}(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 1

1) **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A^2 + B$

b) Calcule la matriz inversa de A

c) Calcule la matriz X de dimensión 2x2 que verifique AX=B

Solución:

Se despeja X de forma algebraica: $AX = B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \longrightarrow IX = A^{-1}B \longrightarrow X = A^{-1}B$

Se calcula $A^{-1}B$: $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

La solución es: $\boxed{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 2

NOTA SOBRE ESTE EJERCICIO.

ESTE EJERCICIO HA SIDO PROPUESTO EN EL MODELO DE LA PAU PARA MAYORES DE 25 AÑOS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EN EL EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.

PUEDES ENCONTRARLO RESUELTO EN MI CANAL.
HAN CAMBIADO LOS NOMBRES, XD.

MODELO 2022 Matemáticas II, +25 Madrid
Problema 1,Opción B

PAU Julio 2021, Problema 1

PAU Junio 2021, Problema 1

PAU Septiembre 2020 Problema 1

Ejercicio 2

2) Lucía, Raquel y Antonio han recaudado un total de 1240 euros para su viaje de estudios. Se sabe que Lucía ha recaudado tanto como Raquel y Antonio juntos, y que Raquel ha recaudado las dos terceras parte de lo recaudado por Antonio. Calcule cuánto ha recaudado cada uno de ellos.

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas del problema.

x=cantidad recaudada por Lucía.
y=cantidad recaudada por Raquel.
z=cantidad recaudada por Antonio.

Se traduce del español al lenguaje algebraico.

"Lucía, Raquel y Antonio han recaudado un total de 1240 euros" $\longrightarrow x + y + z = 1240$

"Lucía ha recaudado tanto como Raquel y Antonio juntos" $\longrightarrow x = y + z \longrightarrow x - y - z = 0$

"Raquel ha recaudado dos terceras parte de lo recaudado por Antonio" $\longrightarrow y = \frac{2}{3} \cdot z \longrightarrow 3y - 2z = 0$

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 1240 \\ x - y - z = 0 \\ \quad 3y - 2z = 0 \end{cases}$

Ejercicio 2

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal. ¡BÚSCALO!

$$\begin{cases} x + y + z = 1240 \\ x - y - z = 0 \\ \quad 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1240 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6200}{10} = 620$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1240 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2480}{10} = 248$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1240 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3720}{10} = 372$$

Solución: Lucía recauda **620 €**, Raquel **248 €** y Antonio **372 €**.

Ejercicio 3

NOTA SOBRE ESTE EJERCICIO.

ESTE EJERCICIO ACERCA DEL ESTUDIO DE LA MONOTONÍA Y DEL CÁLCULO DE LOS EXTREMOS RELATIVOS ES UN EJERCICIO MUY TÍPICO.

PUEDEIS ENCONTRAR RESUELTOS EN MI CANAL EJERCICIOS PARECIDOS.

MODELO 2022 Matemáticas II, +25 Madrid
Problema 2,Opción A

PAU Julio 2021,
Problema 3

PAU Junio 2021,
Problema 3

Ejercicio 3

3) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos.

b) Calcule el área de la región plana acotada, limitada por la función $f(x) = e^x$; el eje OX y las rectas x=0; x=1

Solución: Por ser un polinomio su dominio son todos los números reales.

$$y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \longrightarrow x \cdot (3x - 6) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
f'(x)	+	−	+
	CRECIENTE	DECRECIENTE	CRECIENTE

$f'(-1) = 9 > 0$ $\quad f'(1) = -3 < 0$ $\quad f'(3) = 9 > 0$

$\boxed{f(x)\ es\ creciente\ si\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}$ $\quad \boxed{f(x)\ es\ decreciente\ si\ x \in (0,2)}$

Ejercicio 3

3) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos.

b) Calcule el área de la región plana acotada, limitada por la función $f(x) = e^x$; el eje OX y las rectas x=0; x=1

Solución: a) Aplicaré el criterio de la segunda derivada. Para ello la calculo en primer lugar y sustituyo los valores que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \longrightarrow f''(x) = 6x - 6 \longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6<0 \\ f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6>0 \end{cases}$$

Máximo relativo en x=0

Mínimo relativo en x=2

Se calculan las imágenes del máximo y del mínimo sustituyendo en la función.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

$\boxed{(0,4)\ es\ el\ máximo\ relativo}$ $\boxed{(2,0)\ es\ el\ mínimo\ relativo}$

Ejercicio 3

3) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos.

b) Calcule el área de la región plana acotada, limitada por la función $f(x) = e^x$; el eje OX y las rectas x=0; x=1

Solución: b) La función dada es positiva en todo su dominio. Eso me permite calcular el área de forma directa con la integral entre cero y uno.

$$A = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

El área de acotada por la curva y las rectas x=0 y x=1 es $(e-1)$ unidades de área.

Ejercicio 4

4) Un jugador realiza un lanzamiento de un dado y si la puntuación obtenida es mayor o igual que 4, gana la partida.

a) Calcule la probabilidad de que un jugador gane la partida, si realiza un solo lanzamiento.

b) Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane exactamente tres de las cinco partidas.

c) Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane al menos una de las cinco partidas.

Solución:

Se aplica la regla de Laplace. $$P = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ de\ casos\ totales} = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Solución: La probabilidad de que el jugador gane la partida en un solo lanzamiento es **1/2**.

Para resolver el apartado b), debemos darnos cuenta de que el número de partidas ganadas es una variable aleatoria discreta, que sigue una distribución binomial. Continúo en la siguiente diapositiva.

Ejercicio 4

b) Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane exactamente tres de las cinco partidas.

Solución:

Los valores que definen la distribución binomial que sigue la variable aleatoria son: $n = 5; p = 0'5$

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5^2 = \mathbf{0'3125}$

Solución: la probabilidad de que gane exactamente tres de las cinco partidas es **0’3125**.

Ejercicio 4

c) Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane al menos una de las cinco partidas.

Solución:

Recordamos os valores que definen la distribución binomial que sigue la variable aleatoria son: $n = 5; p = 0'5$

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0'5^0 \cdot 0'5^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0'5^5 = 1 - 0'03125$

$P(X \geq 1) = \mathbf{0'96875}$

Solución: la probabilidad de que gane al menos una de las cinco partidas es **0'96875**