PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

CASTILLA LA MANCHA

MATEMÁTICAS
1ª CONVOCATORIA 2020

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Teoría y ejercicios de probabilidad.

Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020

Teoría y ejercicios de estadística.

Ejercicio 1

En un jardín hay 20 árboles frutales entre manzanos, perales y cerezos. Hay tantos manzanos como perales y cerezos juntos. El número de perales excede en 2 al de cerezos.

a) Plantea un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que permita calcular el número de manzanos, de perales y de cerezos

b) Resuelve el sistema

Solución: Se definen las incógnitas del problema.

x= nº de manzanos.
y= nº de perales.
z= nº de cerezos.

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

"En un jardín hay 20 árboles frutales entre manzanos, perales y cerezos" $x+y+z=20$

"Hay tantos manzanos como perales y cerezos juntos" $x=y+z \longrightarrow x-y-z=0$

"El número de perales excede en 2 al de cerezos" $y=z+2 \longrightarrow y-z=2$

Ejercicio 1

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x - y - z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Determinantes

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{40}{4} = \mathbf{10}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{4} = \mathbf{6}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$$

Solución: El número de manzanos es **10**, el de perales **6** y el de cerezos **4**.

Ejercicio 2

Seis obreros han tardado 4 días en reparar 200 metros de una carretera de montaña.

a) ¿Cuántos metros de carretera repararían cinco obreros igual de eficientes que los anteriores en tres días?

b) ¿Cuántos días tardarían 4 obreros igual de eficientes en reparar 300 metros de carretera?

Solución:

Se plantea una regla de 3 compuesta.

Obreros	Días		Metros
6	4		200
		D	
5	3		x

D

A **doble** número de obreros trabajando, el número de metros de carretera reparados será la **el doble,** para un número de días fijo. Por ello la relación entre el número de obreros y el número metros reparados es **directamente proporcional**.

A **doble** cantidad de días trabajando un número fijo de obreros, el número metros de carretera reparados será el **doble**. Por ello la relación entre la cantidad de metros reparados y el número de días es **directamente proporcional**.

Se plantea la ecuación de la regla de 3 compuesta.

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{200}{\text{x}} \longrightarrow \frac{24}{15}=\frac{200}{\text{x}} \longrightarrow x=\frac{15\cdot 200}{24} \longrightarrow x=125\ metros$$

$\boxed{\text{5 obreros repararían \textbf{125 metros de carretera} en 3 días.}}$

Ejercicio 2

Seis obreros han tardado 4 días en reparar 200 metros de una carretera de montaña.

b) ¿Cuántos días tardarían 4 obreros igual de eficientes en reparar 300 metros de carretera?

Solución:

Se plantea una regla de 3 compuesta.

Obreros		Días		Metros
6		4		200
	I		D	
4		x		300

A **doble** número de obreros trabajando, el número de días se tardará en reparar una cierta cantidad de metros de carretera será la **mitad**. Por ello la relación entre el número de obreros y el número de días es **inversamente proporcional**.

A **doble** cantidad de metros de carretera reparados, el número de días necesarios será el **doble**, manteniendo el número de obreros. Por ello la relación entre la cantidad de metros reparados y el número de días es **directamente proporcional**.

Se plantea la ecuación de la regla de 3 compuesta.

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{200}{300} = \frac{4}{x} \longrightarrow \frac{800}{1800} = \frac{4}{x} \longrightarrow x = \frac{4 \cdot 1800}{800} \longrightarrow x = 9\ días$$

4 obreros tardarán **9 días** en reparar 300 metros de carretera .

Ejercicio 3

Dados los puntos $A(4,1)$ y $B(6,7)$,calcula:

a) La ecuación de la recta r que pasa por el punto A y el punto B

b) La ecuación de una recta paralela a la recta s: $y = 2x + 5$ que pasa por el punto A.

c) Las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A y B.

Solución:

Se calcula la pendiente a partir de su fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \longrightarrow m = \frac{7-1}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$$

La pendiente de la recta es 3.

Calculo la ecuación de la recta utilizando la ecuación punto-pendiente. $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - 1 = 3 \cdot (x - 4)$ Ecuación punto pendiente de la recta $\longrightarrow$ $-3x + y + 11 = 0$ Ecuación general de la recta

La ecuación de la recta pedida es: $\boldsymbol{-3x + y + 11 = 0}$

Ejercicio 3

Dados los puntos $A(4,1)$ y $B(6,7)$,calcula:

b) La ecuación de una recta paralela a la recta s: $y = 2x + 5$ que pasa por el punto A.

c) Las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A y B.

Solución:

La pendiente de la recta dada es 2. Y puesto que la recta pedida es paralela, su pendiente también es 2.

Calculo la ecuación de la recta utilizando la ecuación punto-pendiente. $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - 1 = 2 \cdot (x - 4)$ Ecuación punto pendiente de la recta $\longrightarrow$ $-2x + y + 7 = 0$ Ecuación general de la recta

La ecuación de la recta pedida es: $\boldsymbol{-2x + y + 7 = 0}$

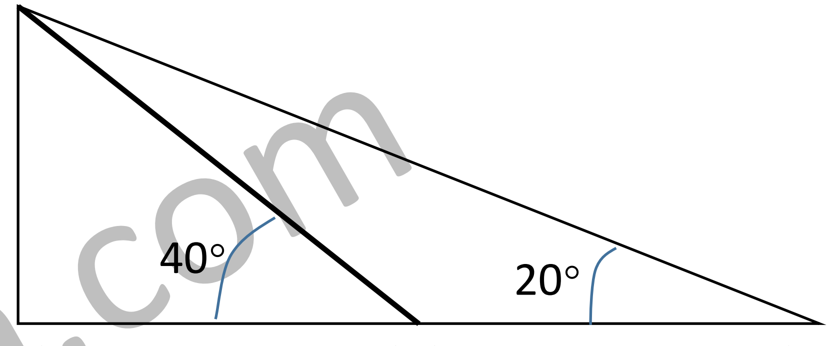
Las coordenadas del punto medio se calculan con la fórmula:

$$(x_M, y_M) = \frac{(x_A, y_A) + (x_B, y_B)}{2} = \frac{(4,1) + (6,7)}{2} = \frac{(10,8)}{2} = (5,4)$$

Las coordenadas del punto medio son: $\mathbf{M} = (\mathbf{5}, \mathbf{4})$

Ejercicio 4

Desde donde me encuentro veo la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 40°. Retrocedo 100 metros y el ángulo de elevación con el que veo ahora esa parte más alta de ese edificio es 20° ¿Cuál es la altura de ese edificio?



Solución:

Se hace un esquema de la situación.

Este es el típico problema de doble tangente.

Se plantea un sistema de ecuaciones con las dos tangentes de los dos triángulos rectángulos.

$$\left.\begin{cases} \tan(40°) = \dfrac{h}{x} \longrightarrow h = \mathrm{x} \cdot \tan(40°) \\ \tan(20°) = \dfrac{h}{x+100};\ h = (\mathrm{x}+100) \cdot \tan(20°) \end{cases}\right\} \longrightarrow (\mathrm{x}+100) \cdot \tan(20°) = x \cdot tan(40°)$$

Para resolver el sistema, se despeja h de ambas ecuaciones. Y se igualan las alturas (método de igualación):
Ya se puede despejar x, aunque previamente calcularemos los valores de las tangentes con la calculadora.

$$(\mathrm{x}+100) \cdot 0'364 = x \cdot 0'839 \longrightarrow 0'364\mathrm{x} + 36'4 = 0'839x \longrightarrow x = 76'63\, m$$

Y ya se puede calcular h: $h = 76'63 \cdot \tan(40°) = 64'3\ m$

Solución: La altura del edificio es **64’3 m**.

Ejercicio 5

De las 200 personas que trabajan en una empresa, 140 saben hablar alemán. 110 son mujeres y 90 son mujeres que saben hablar alemán. Elegida una persona al azar de esa empresa, calcula la probabilidad de que:

a) Sea una mujer y no sepa hablar alemán

b) Sea un hombre y sepa hablar alemán

c) Sea mujer, sabiendo que sabe hablar alemán

d) Sepa hablar alemán, sabiendo que es un hombre

Solución:

Se construye una tabla de contingencia.

	Mujer	Hombre	TOTAL
Habla alemán	90	50	140
No habla alemán	20	40	60
TOTAL	110	90	200

Para calcular las probabilidades se debe utilizar la regla de Laplace.

$$P = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ de\ casos\ totales}$$

$$P(Mujer\ y\ No\ alemán) = \frac{20}{200} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$

$$P(Hombre\ y\ alemán) = \frac{50}{200} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$P(Mujer/alemán) = \frac{90}{140} = \mathbf{\frac{9}{14}}$$

$$P(alemán/hombre) = \frac{50}{90} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

Ejercicio 6

La altura, h, expresada en metros, a la que se encuentra un proyectil que lanzamos verticalmente en cada instante, x , expresado en segundos, viene dada por la función $f(x)=500x - 5x^2$

a) ¿En qué instante alcanza la máxima altura?

b) ¿Cuál es esa máxima altura?

c) ¿A qué altura se encuentra cuando han transcurrido 20 segundos?

d) ¿Cuántos segundos tarda en caer al suelo el proyectil?

Ejercicios de parábolas.
Nivel medio.

Solución:

Puesto que el coeficiente del término cuadrático es negativo, la forma de la función es de parábola invertida. Por ello el máximo se encuentra en el vértice de la parábola.

Calculo el vértice: $v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-500}{2 \cdot (-5)} = 50$

Alcanza la altura máxima a los **50 segundos**.

La altura máxima se calcula sustituyendo en la función.

$$f(50) = 500 \cdot 50 - 5 \cdot 50^2 = 12500$$

Alcanza una altura máxima de **12.500 metros**.

Ejercicio 6

La altura, h, expresada en metros, a la que se encuentra un proyectil que lanzamos verticalmente en cada instante, x , expresado en segundos, viene dada por la función $f(x)=500x - 5x^2$

c) ¿A qué altura se encuentra cuando han transcurrido 20 segundos?

d) ¿Cuántos segundos tarda en caer al suelo el proyectil?

Ejercicios de parábolas.
Nivel PAGS y Bach.

Solución:

La altura a los 20 segundos se calcula sustituyendo en la función.

$$f(20) = 500 \cdot 20 - 5 \cdot 20^2 = 8000$$

Se encuentra a una altura de **8.000 metros** a los 20 segundos.

Se iguala la función a cero para calcular el tiempo que tarda en caer al suelo.

$$500 \cdot x - 5 \cdot x^2 = 0 \longrightarrow x \cdot (500 - 5x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 100 \end{cases}$$

El proyectil tarda en caer **100 segundos**.

Ejercicio 7

Las notas del último examen de una clase de 15 alumnos son, 4, 6, 7,10, 9, 9, 8, 7, 6, 5, 7, 4, 5, 7 y 8.

a) Haz una tabla con los valores de la variable y las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas.

b) Calcula la moda, la media aritmética y la mediana.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

Solución: Se construye la tabla. Debemos añadir una columna, en la que se obtiene la frecuencia acumulada.

x_i	f_i	F_i
4	2	2
5	2	4
6	2	6
7	4	10
8	2	12
9	2	14
10	1	15
TOTAL:	**15**	

Ejercicio 7

En el apartado b) nos piden las medidas de centralización.

x_i	f_i	F_i	
4	2	2	2<8
5	2	4	4<8
6	2	6	6<8
7	4	10	10>8
8	2	12	
9	2	14	
10	1	15	
TOTAL:	**15**		

La moda es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta. En este caso es: $\boxed{\boldsymbol{Mo = 7}}$

Para el cálculo de la mediana, debemos tener en cuenta que el número de datos es impar. Por ello, la mediana es el valor del dato central.

$$Pos = \frac{15+1}{2} = 8 \longrightarrow Me = x_8 \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{Me = 7}}$$

Ejercicio 7

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
4	2	8
5	2	10
6	2	12
7	4	28
8	2	16
9	2	18
10	1	10
TOTAL:	**15**	**102**

Debemos añadir una columna para calcular la media.

Se aplica directamente la fórmula:

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$$

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{102}{15} = \boxed{6'8}$$

Teoría y ejercicios de estadística.

Ejercicio 7

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
4	2	8	32
5	2	10	50
6	2	12	72
7	4	28	196
8	2	16	128
9	2	18	162
10	1	10	100
TOTAL:	**15**	**102**	**740**

Teoría y ejercicios de estadística.

En el apartado c) nos piden las medidas de dispersión más comunes.

Lo más práctico es agregar una columna, $x_i^2 \cdot f_i$

Y se aplican las fórmulas correspondientes.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - (\overline{x})^2 \longrightarrow \sigma^2 = \frac{740}{15} - 6'8^2 \approx \boxed{3'0933}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \longrightarrow \sigma = \sqrt{3'0933} = \boxed{1'759}$$