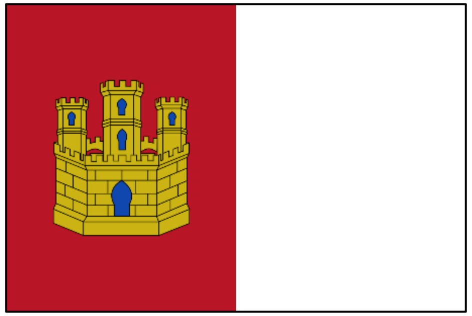
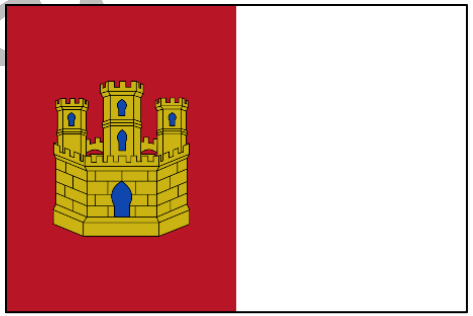
PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



CASTILLA LA MANCHA



MATEMÁTICAS

1ª convocatoria 2017

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Ejercicios de funciones cuadráticas
NIVEL ALTO

Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020

Ejercicio 1

Juan tiene dos hijos, actualmente triplica la edad del mayor. El menor dentro de cinco años igualará la edad que el mayor tiene ahora. Dentro de quince años, Juan tendrá el doble de edad que su hijo mayor.

a) Plantea las ecuaciones necesarias.

b) Calcula la edad actual de cada uno de ellos.

Solución:

Se definen las incógnitas del problema.

x= edad de Juan
y= edad del hijo mayor
z= edad del hijo menor

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

"actualmente triplica la edad del mayor." $x = 3y$

"El menor dentro de cinco años igualará la edad que el mayor tiene ahora" $y = z + 5$

"Dentro de quince años, Juan tendrá el doble de edad que su hijo mayor." $x + 15 = 2 \cdot (y + 15) \longrightarrow x + 15 = 2y + 30$

$$x = 2y + 15$$

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x = 3y \\ y = z + 5 \\ x = 2y + 15 \end{cases}$

Ejercicio 1

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x = 3y \\ y = z + 5 \\ x = 2y + 15 \end{cases}$

En este sistema concreto, ahorraremos tiempo si igualamos la primera y la tercera ecuación.

$$3y = 2y + 15 \longrightarrow y = 15$$

Se sustituye en la primera ecuación y se calcula la edad del padre. $x = 3y = 3 \cdot 15 = 45$

La edad del hijo menor se calcula sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación y despejando z.

$$y = z + 5 \longrightarrow z = y - 5 = 15 - 5 = 10$$

Solución: Juan tiene **45 años**, su hijo mayor tiene **15 años** y su hijo menor **10 años**.

Ejercicio 2

Tenemos dos velas. La más estrecha mide 14 centímetros y se consume totalmente en tres horas y media. La otra, mucho más gruesa, tarda cinco horas en consumirse. Si las dejamos arder, al cabo de dos horas, tendrán la misma altura.

a) ¿Qué altura tiene la vela más ancha al cabo de dos horas?

b) ¿Qué altura inicial tenía la vela más gruesa?

Solución: Vamos a definir una función lineal que relacione la altura de la vela con el tiempo de uso.

Sea **x** el tiempo que lleva ardiendo la vela en horas e **y**, el valor de la altura de la vela en centímetros.

En el caso de la primera vela, asigno coordenadas a los datos dados:

"La más estrecha mide 14 centímetros " $A = (0{,}14)$ *"y se consume totalmente en tres horas y media"* $B = (3'5{,}0)$

Calculo la ecuación para la vela más estrecha:

La pendiente de una recta se puede calcular a partir de las coordenadas de los dos puntos a partir de su definición.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \longrightarrow m = \frac{0 - 14}{3'5 - 0} = -4$$ La ordenada en el origen se calcula a partir de un punto y la ecuación explícita.

$$y = mx + n \xrightarrow{m=-4} y = -4x + n \xrightarrow{(0,14)} 14 = -4 \cdot 0 + n \longrightarrow n = 14$$

La ecuación de la recta será: $y = -4x + 14$

Ejercicio 2

Tenemos dos velas. La más estrecha mide 14 centímetros y se consume totalmente en tres horas y media. La otra, mucho más gruesa, tarda cinco horas en consumirse. Si las dejamos arder, al cabo de dos horas, tendrán la misma altura.

a) ¿Qué altura tiene la vela más ancha al cabo de dos horas?

b) ¿Qué altura inicial tenía la vela más gruesa?

Solución: A partir de la función obtenida podemos averiguar la altura de la vela estrecha a las dos horas.

Se sustituye en la función por x=2. $y = -4 \cdot 2 + 14 = 6\ cm$

Puesto que ambas velas tienen la misma altura, podemos dar la respuesta al apartado a).

Solución: La altura que tiene la vela más ancha al cabo de dos horas es **6 cm**.

Ejercicio 2

Tenemos dos velas. La más estrecha mide 14 centímetros y se consume totalmente en tres horas y media. La otra, mucho más gruesa, tarda cinco horas en consumirse. Si las dejamos arder, al cabo de dos horas, tendrán la misma altura.

b) ¿Qué altura inicial tenía la vela más gruesa?

Calculo ahora la ecuación de que relaciona la altura de la vela gruesa con el tiempo que lleva ardiendo.

Asigno coordenadas a los datos dados:

"A las dos horas mide 6 cm" $A=(2{,}6)$ *"La otra, mucho más gruesa, tarda cinco horas en consumirse"* $B=(5{,}0)$

La pendiente de una recta se puede calcular a partir de las coordenadas de los dos puntos a partir de su definición.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\longrightarrow m=\frac{0-6}{5-2}=-2$$

La ordenada en el origen se calcula a partir de un punto y la ecuación explícita.

$$y=mx+n\xrightarrow{m=-2}y=-2x+n\xrightarrow{(5,0)}0=-2\cdot 5+n\longrightarrow n=10$$

La ecuación de la recta será: $y=-2x+10$

Se sustituye en la función por x=0. $y=-2\cdot 0+10=10\ cm$

Solución: La altura que tiene la vela más gruesa es **10 cm.**

Ejercicio 3

Un premio de lotería de 25.000 € se reparte de forma inversamente proporcional entre tres familias en función de sus miembros, que son 3,5 y 6. Calcula:

a) ¿Cuánto corresponde a cada familia?

b) ¿Cuánto corresponde a cada miembro de la familia de cinco personas?

Solución: Este ejercicio de reparto inverso se puede hacer de varias formas. Explicaré una de las más habituales.

Obtenemos los inversos del número de personas en cada familia. $\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{6}$

Convertimos las fracciones a denominador común (que es el mcm). En este caso es 30. $\frac{10}{30};\frac{6}{30};\frac{5}{30}$

Realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores: 10,6 y 5. $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{10+5+6}=\frac{25000}{21}=1190'48$

Calculo x, y, z. $\frac{x}{10}=1190'48 \longrightarrow x=11904'8$ $\quad \frac{z}{5}=1190'48 \longrightarrow z=5942'4$

$\frac{y}{6}=1190'48 \longrightarrow y=7142'8$ $\quad b)\ N=\frac{7142'8}{5}=1428'56\text{ €}\ \textit{por persona}$

Solución: A la familia de 3 personas le corresponden **11904'8 €**, a la de 5, **7142'8 €** y a la de 6, **5942'4 €**. A cada miembro de la familia de 5 personas le corresponden **1428'58 €**.

Ejercicio 4

Los costes de fabricación de un determinado producto vienen dados por la siguiente expresión: $C = 40000 + 20q + q^2$
Siendo q, el n° de unidades y el precio de venta por unidad es de 520 €. Calcula:

a) Beneficio obtenido al producir 200 unidades.

b) Número de unidades necesario para hacer máximo el beneficio.

Solución: La función de ingresos se define como precio por cantidad. $I = p \cdot q = 520 \cdot q = 520 \cdot 200 = 104000$ €

Para calcular los costes se sustituye q=200 en la función de coste. $C(200) = 40000 + 20 \cdot 200 + 200^2 = 84000$ €

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes. $B = I - C = 104000 - 84000 = 20000$ €

Solución: Al producir 200 unidades el beneficio obtenido será de **20000 €.**

Calculo la función beneficio en función de q: $B = I - C = 520q - (40000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40000$

Puesto que el coeficiente del término cuadrático es negativo, el máximo de la función está asociado al vértice.

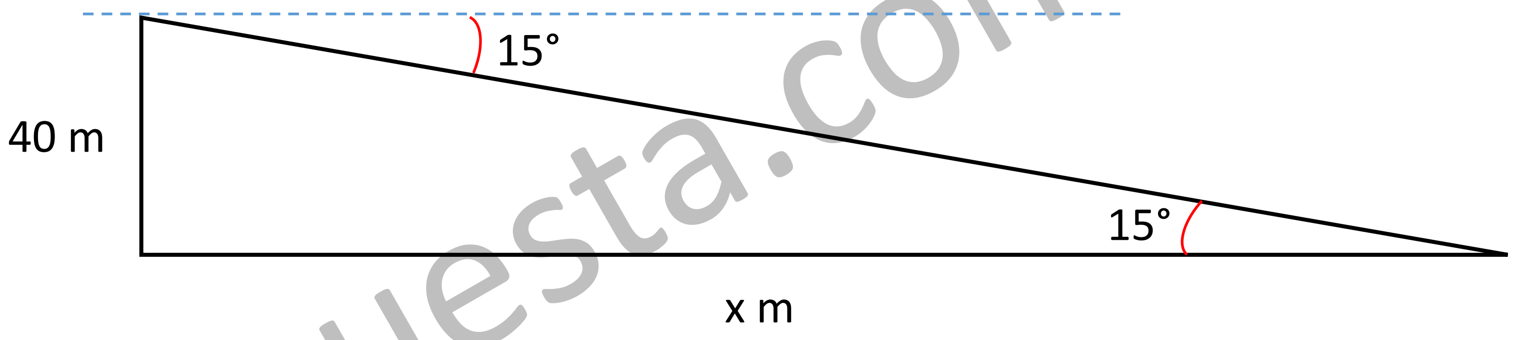
Calculo el vértice con la fórmula correspondiente. $V = -\frac{b}{2a} = -\frac{500}{2 \cdot (-1)} = 250$

Solución: Para obtener el beneficio máximo se deben fabricar **250 unidades**.

Ejercicio 5

El radar de un barco detecta un objeto a 40 m. de profundidad en una dirección que forma un ángulo de 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo por el fondo, para llegar desde el barco hasta el objeto?

Solución: Hago un esquema de la situación.



Utilizo la definición de tangente de un ángulo.

$$tan(15°) = \frac{40}{x} \longrightarrow x \cdot tan(15°) = 40 \longrightarrow x = \frac{40}{tan(15°)} \approx 149'28m$$

Solución: El buzo debe recorrer **149’28 metros** aproximadamente.

Ejercicio 6

La tabla siguiente muestra los cientos de oficinas bancarias y los miles de comercios en ocho comunidades autónomas diferentes. Calcula:

a) La tabla completa.

b) Medias, desviaciones típicas y covarianza.

c) Coeficiente de correlación.

Xi(oficinas)	Yi(comercios)	Xi^2	Yi^2	$Xi.Yi$
31	30	961	900	930
19	16	361	256	304
9	12	81	144	108
7	11	49	121	77
6	11	36	121	66
5	9	25	81	45
5	10	25	100	50
5	5	25	25	25
$\sum = 87$	$\sum = 104$	$\sum = 1563$	$\sum = 1748$	$\sum = 1605$

Ejercicio 5

b) Medias, desviaciones típicas y covarianza.

Se aplica la fórmula para calcular las medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{87}{8} = \mathbf{10'875} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{104}{8} = \mathbf{13}$$

Se aplica la fórmula para calcular las desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1563}{8} - (10'875)^2} = \sqrt{77'11} \approx \mathbf{8'78}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1748}{8} - 13^2} = \sqrt{49'5} \approx \mathbf{7'04}$$

Se aplica la fórmula para calcular la covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1605}{8} - 10'875 \cdot 13 = \mathbf{59'25}$$

Xi(oficinas)	Yi(comercios)	Xi^2	Yi^2	$Xi.Yi$
31	30	961	900	930
19	16	361	256	304
9	12	81	144	108
7	11	49	121	77
6	11	36	121	66
5	9	25	81	45
5	10	25	100	50
5	5	25	25	25
$\sum = 87$	$\sum = 104$	$\sum = 1563$	$\sum = 1748$	$\sum = 1605$

Ejercicio 6

c) Coeficiente de correlación.

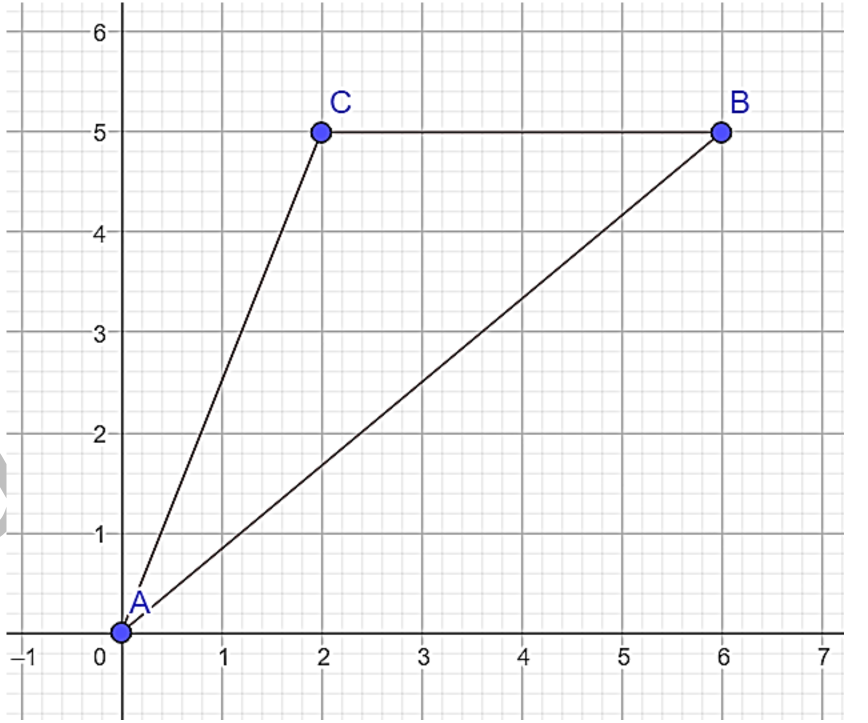
Se aplica la fórmula para calcular el coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{59'25}{8'78 \cdot 7'04} \approx \mathbf{0'96}$$

La correlación entre las variables es muy fuerte, ya que el valor se acerca a 1.

Xi(oficinas)	Yi(comercios)	Xi^2	Yi^2	$Xi.Yi$
31	30	961	900	930
19	16	361	256	304
9	12	81	144	108
7	11	49	121	77
6	11	36	121	66
5	9	25	81	45
5	10	25	100	50
5	5	25	25	25
$\sum = 87$	$\sum = 104$	$\sum = 1563$	$\sum = 1748$	$\sum = 1605$

Ejercicio 7



Tenemos un triángulo de vértices A(0,0), B(6,5),C(2,5).

a) Calcula la base AB.

b) Calcula la distancia entre la base y el punto C.

c) Calcula el área del triángulo.

Solución: Se hace una representación de los puntos y del triángulo.

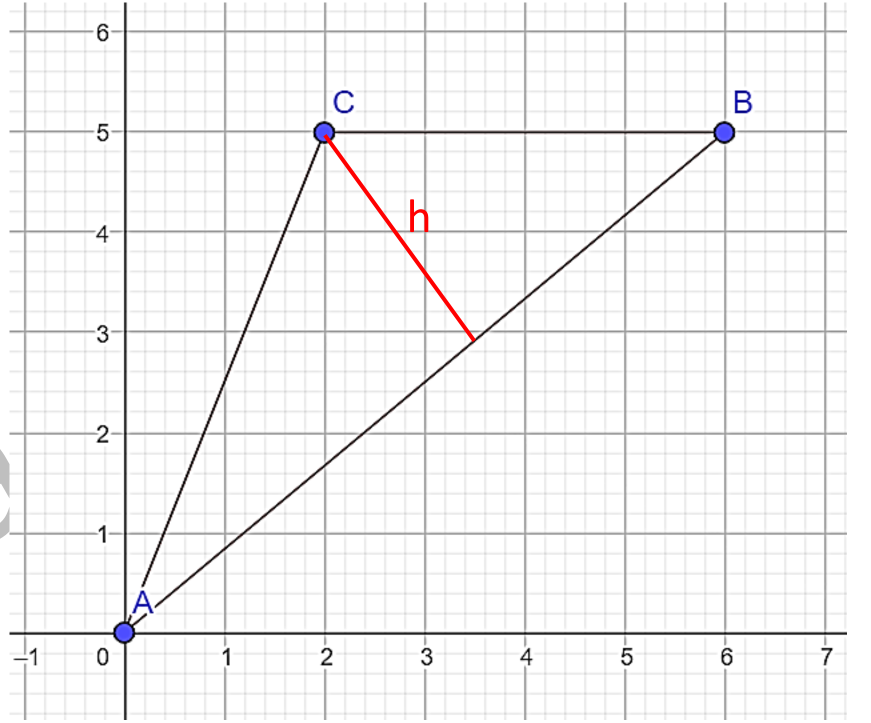
La longitud de la base se calcula con la fórmula de la distancia entre dos puntos.
La distancia entre dos puntos se calcula como el módulo del vector que definen.

Calculo el vector: $\overrightarrow{AB} = B - A = (6,5) - (0,0) = (6,5)$

Y su módulo: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

Solución: La longitud de la base es $\sqrt{61}$ unidades de longitud

Ejercicio 7



Tenemos un triángulo de vértices A(0,0), B(6,5),C(2,5).

b) Calcula la distancia entre la base y el punto C.

Se representa la altura en el esquema.

Calculo la ecuación de la recta que pasa por A y B.

Calculo la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-0}{6-0} = \frac{5}{6}$

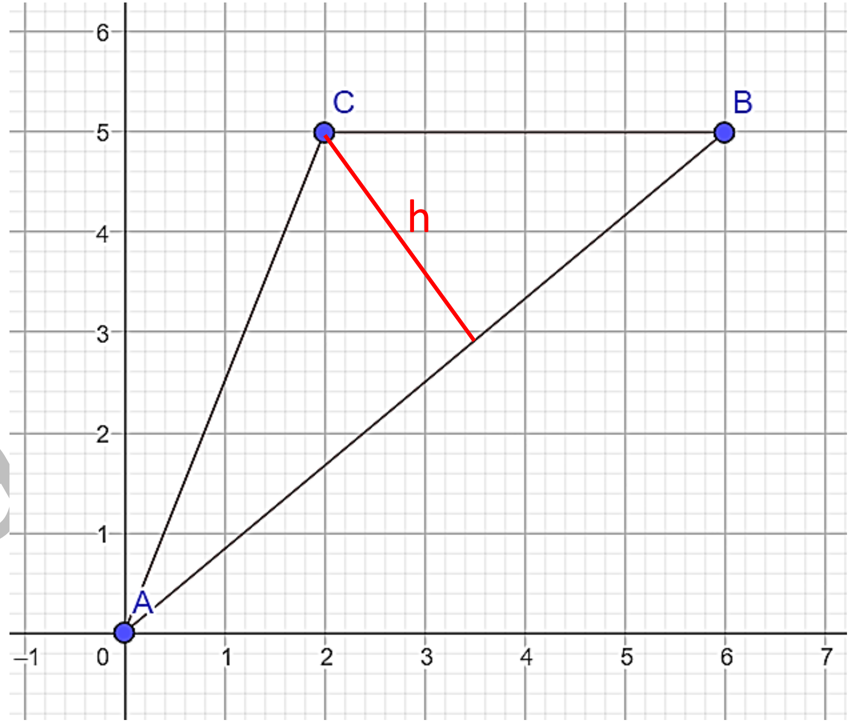
Calculo la ecuación de la recta utilizando la ecuación punto-pendiente.

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \longrightarrow y - 0 = \frac{5}{6} \cdot (x - 0) \longrightarrow 6y = 5x \longrightarrow -5x + 6y = 0$$

Calculo la altura del triángulo. $h = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-5 \cdot 2 + 6 \cdot 5|}{\sqrt{(-5)^2 + 6^2}} = \frac{\mathbf{20}}{\sqrt{\mathbf{61}}} = \frac{\mathbf{20\sqrt{61}}}{\mathbf{61}}$

Solución: La distancia entre la base y el punto C es: $\frac{\mathbf{20\sqrt{61}}}{\mathbf{61}}$ ***unidades de longitud***

Ejercicio 7



Tenemos un triángulo de vértices A(0,0), B(6,5),C(2,5).

c) Calcula el área del triángulo.

Calculo el área del triángulo utilizando los datos obtenidos en los apartados anteriores.

$$\overline{AB} = \sqrt{61} \qquad h = \frac{20}{\sqrt{61}} = \frac{20\sqrt{61}}{61}$$

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{61}} \cdot \frac{20}{\cancel{\sqrt{61}}}}{2} = \boldsymbol{10\ unidades\ de\ área}$$

Solución: El triángulo tiene **10 unidades de área**.