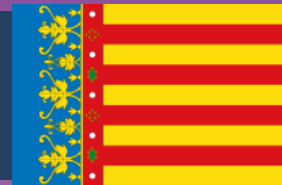




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO 2026

Análisis de funciones

Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo t (en años) y viene dado por la función:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c . *(1 punto)*
- b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. *(1 punto)*
- c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. *(0,5 puntos)*
- d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. *(1 punto)*

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $t = 1$ y $t = 2$. En el resto de los valores la función es continua por estar definida por funciones polinómicas y porque, aunque $t = 0$ anula los denominadores de los tramos racionales, ese valor no pertenece a dichos tramos.

Se estudia la continuidad de la función en $t = 1$.

$$g(1) = 1^2 + 2 = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} t^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{a}{t} + 2 = \frac{a}{1} + 2 = a + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) \rightarrow 3 = a + 2 \rightarrow a = 1$$

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $t = 2$.

$$g(2) = \frac{a}{2} + 2 \xrightarrow{a=1} g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{a}{t} + 2 = \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} ct + \frac{b}{t^2} = 2c + \frac{b}{2^2} = 2c + \frac{b}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) \rightarrow \frac{5}{2} = 2c + \frac{b}{4} \rightarrow b + 8c = 10$$

Como se dispone sólo de una ecuación y dos incógnitas, no se puede obtener el valor de ninguno de los dos parámetros. Se debe aplicar la condición que falta: $g'(3) = 23/27$.

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se calcula la derivada del tercer trozo, ya que $2 < 3 \leq 4$

$$g'_3(t) = c - \frac{2b}{t^3} \quad \text{Se sustituye } t = 3. \quad g'_3(3) = c - \frac{2b}{3^3} = \frac{23}{27} \rightarrow c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27} \rightarrow 27c - 2b = 23$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} b + 8c = 10 \\ 27c - 2b = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &b = 10 - 8c \\ &27c - 2(10 - 8c) = 23 \end{aligned}$$

$$27c - 20 + 16c = 23 \rightarrow 43c = 43 \rightarrow c = 1$$

$$b = 10 - 8c = 10 - 8 \cdot 1 = 2$$

Los valores pedidos son: $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$.

Problema 2A

b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo.

Se calcula la derivada de cada uno de los trozos y se expresa como función definida a trozos y se analiza la monotonía de cada trozo.

El primer trozo es **creciente en su dominio** ya que: $g'_1(t) > 0$ si $0 < t < 1$

El segundo trozo es **decreciente en su dominio** ya que: $g'_2(t) < 0$ si $1 < t < 2$

$$g'_3(t) = 1 - \frac{4}{t^3} \rightarrow 1 - \frac{4}{t^3} = 0 \rightarrow \frac{4}{t^3} = 1 \rightarrow t^3 = 4 \rightarrow t = \sqrt[3]{4} \approx 1,59 \notin (2,4)$$

El tercer trozo es **creciente en su dominio** ya que: $g'_3(t) > 0$ si $2 < t < 4$

Se observa que el valor de mercado de la empresa **ha crecido con el primer y el tercer gerente, pero ha descendido con el segundo gerente.**

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2, & 1 < t \leq 2 \\ t + \frac{2}{t^2}, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

$$g'(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1, \\ -\frac{1}{t^2}, & 1 < t < 2 \\ 1 - \frac{4}{t^3}, & 2 < t < 4 \end{cases}$$

Problema 2A

c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado.

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2, & 1 < t \leq 2 \\ t + \frac{2}{t^2}, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

Anteriormente se ha comprobado que la función es continua y que no hay puntos críticos interiores en los intervalos abiertos de cada tramo. Por tanto, para estudiar los extremos absolutos y relativos, analizamos los puntos $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 4$, junto con los cambios de crecimiento.

$$g(0) = 0^2 + 2 = 2 \quad g(1) = 1^2 + 2 = 3 \quad g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2,5 \quad g(4) = 4 + \frac{2}{4^2} = \frac{66}{16} = \frac{33}{8} = 4,125$$

En $t = 0$ la función presenta un mínimo absoluto **(0, 2)**, ya que $g(0) = 2$ es el valor más pequeño que tiene la función.

En $t = 4$ la función presenta un máximo absoluto **(4, 33/8)**, ya que $g(4) = 33/8$ es el valor más grande que alcanza la función.

En $t = 1$ la función presenta un máximo relativo **(1, 3)**, ya que la función pasa de crecer a decrecer.

En $t = 2$ la función presenta un mínimo relativo **(2, 5/2)**, ya que la función pasa de decrecer a crecer.

NOTA: en $t=1$ y $t=2$ la función es continua pero no derivable, por eso el extremo relativo se detecta por el cambio de monotonía y no por la condición $g'(t) = 0$

NOTA: Observa que $g(4) > g(1)$ por eso, en $t = 1$ la función presenta un máximo relativo y no absoluto.

NOTA: Observa que $g(0) < g(2)$ por eso, en $t = 2$ la función presenta un mínimo relativo y no absoluto.

Problema 2A

d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente.

Anteriormente se ha comprobado que $g_1(t)$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área ya que el mínimo absoluto se encuentra por encima del eje X . Por ello, para calcular el salario basta con obtener el valor de la integral definida de $10^5 \cdot g_1(t)$ entre 0 y 1.

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_0^1 10^5 \cdot g(t) \, dt = 10^5 \cdot \int_0^1 (t^2 + 2) \, dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2 \cdot t \right]_0^1 = 10^5 \cdot \left[\left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 \right) \right] = 10^5 \cdot \frac{7}{3}$$

$$\int_0^1 10^5 \cdot g(t) \, dt = \frac{7 \cdot 10^5}{3} \approx 233333,33 \, \text{€}$$

El salario del primer gerente fue de **233333,33 €**.

BONUS

