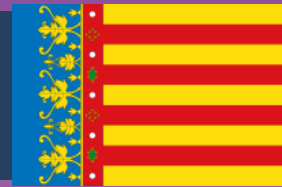




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

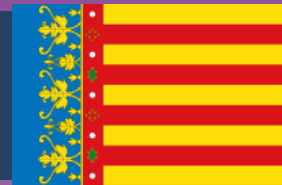
JUNIO 2026

Álgebra matricial





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JUNIO 2026

Álgebra matricial

PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)
- b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (1,5 puntos)

www.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$4XB + C^t D = I \longrightarrow 4XB = I - C^t D \longrightarrow XB = \frac{1}{4}(I - C^t D) \longrightarrow XB \cdot B^{-1} = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

$$X \cdot I = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1} \longrightarrow X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Para calcular X , debemos calcular previamente $I - C^t D$ y B^{-1} .

$$C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de B a continuación.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Calcula la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|B|$; $|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz B **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (Adj(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1A

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Calculo la matriz X :

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & -1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente.

Calculo la matriz $F \cdot C$ y la matriz $(F \cdot C)^2$:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + z \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + z \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F \cdot C)^2 = (F \cdot C) \cdot (F \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot z & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ z \cdot 1 + 0 \cdot z & z \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}$$

Igualo $F \cdot C$ a la matriz $(F \cdot C)^2$ dado que la matriz es idempotente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales si lo son sus términos a_{ij} :

$$\begin{cases} 1 = 1 + z \\ 1 = 1 \\ z = z \\ 0 = z \end{cases} \longrightarrow z = 0$$

La matriz $F \cdot C$ será idempotente si $z = 0$.