



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

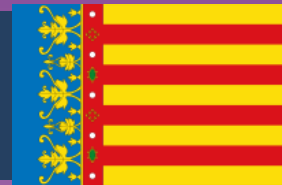
JUNIO 2026

Álgebra matricial





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JUNIO 2026

Álgebra matricial

PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)
- b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (1,5 puntos)

www.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$4XB + C^t D = I \longrightarrow 4XB = I - C^t D \longrightarrow XB = \frac{1}{4}(I - C^t D) \longrightarrow XB \cdot B^{-1} = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

$$X \cdot I = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1} \longrightarrow X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Para calcular X , debemos calcular previamente $I - C^t D$ y B^{-1} .

$$C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de B a continuación.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Calcula la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|B|$; $|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz B **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (Adj(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1A

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1}$$

Calculo la matriz X :

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D) \cdot B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & -1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente.

Calculo la matriz $F \cdot C$ y la matriz $(F \cdot C)^2$:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + z \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + z \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F \cdot C)^2 = (F \cdot C) \cdot (F \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot z & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ z \cdot 1 + 0 \cdot z & z \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}$$

Igualo $F \cdot C$ a la matriz $(F \cdot C)^2$ dado que la matriz es idempotente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}$

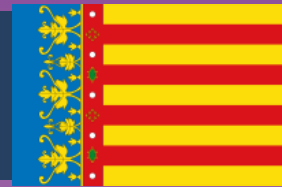
Dos matrices son iguales si lo son sus términos a_{ij} :

$$\begin{cases} 1 = 1 + z \\ 1 = 1 \\ z = z \\ 0 = z \end{cases} \longrightarrow z = 0$$

La matriz $F \cdot C$ será idempotente si $z = 0$.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JUNIO 2026

Programación lineal

© Angel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JUNIO 2026

Programación lineal

Una granja desea crear una mezcla fertilizante líquida utilizando dos compuestos comerciales, NutriMax y BioGrow. Cada litro de estos compuestos aporta diferentes cantidades de unidades de nitrógeno, fósforo y potasio. Para que el cultivo sea productivo, los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio. Se sabe que un litro de NutriMax contiene 2 unidades de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 1 unidad de potasio, mientras que un litro de BioGrow contiene 1 unidad de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 2 unidades de potasio. El coste de un litro de NutriMax es de 5 euros y el de BioGrow es de 4 euros.

- a) ¿Cuántos litros de cada producto han de utilizarse para que el coste de la mezcla sea mínimo?
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x =cantidad en litros de NutriMax.

y =cantidad en litros de BioGrow.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

	L de compuesto	Unidades de Nitrógeno	Unidades de Fósforo	Unidades de Potasio	Coste por L
NutriMax	x	$2x$	x	x	5 €
BioGrow	y	y	y	$2y$	4 €

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones. Lo hago en la diapositiva siguiente.

Problema 1B

	L de compuesto	Unidades de Nitrógeno	Unidades de Fósforo	Unidades de Potasio	Coste por L
NutriMax	x	$2x$	x	x	5 €
BioGrow	y	y	y	$2y$	4 €

$$\begin{array}{lll} \text{"... como mínimo 8 unidades de nitrógeno"} & \longrightarrow & 2x + y \geq 8 \\ \text{"... como mínimo 6 unidades de fósforo"} & \longrightarrow & x + y \geq 6 \\ \text{"... como mínimo 10 unidades de potasio"} & \longrightarrow & x + 2y \geq 10 \\ \text{"restricciones triviales"} & \longrightarrow & x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

La función objetivo está definida por el coste: $z = 5x + 4y$

Problema 1B

Quedando el planteamiento definitivo así: **Minimizar** $z = 5x + 4y$ s. a.
$$\begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

(a) $2x + y \geq 8$

Expreso la recta: $2x + y = 8$

Se dan valores para representar:

x	y
0	8
4	0

Compruebo si el (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$2 \cdot 0 + 0 \geq 8 \rightarrow$ **No cumple**

(b) $x + y \geq 6$

Expreso la recta: $x + y = 6$

Se dan valores para representar:

x	y
0	6
6	0

Compruebo si el (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$0 + 0 \geq 6 \rightarrow$ **No cumple**

(c) $x + 2y \geq 10$

Expreso la recta: $x + 2y = 10$

Se dan valores para representar:

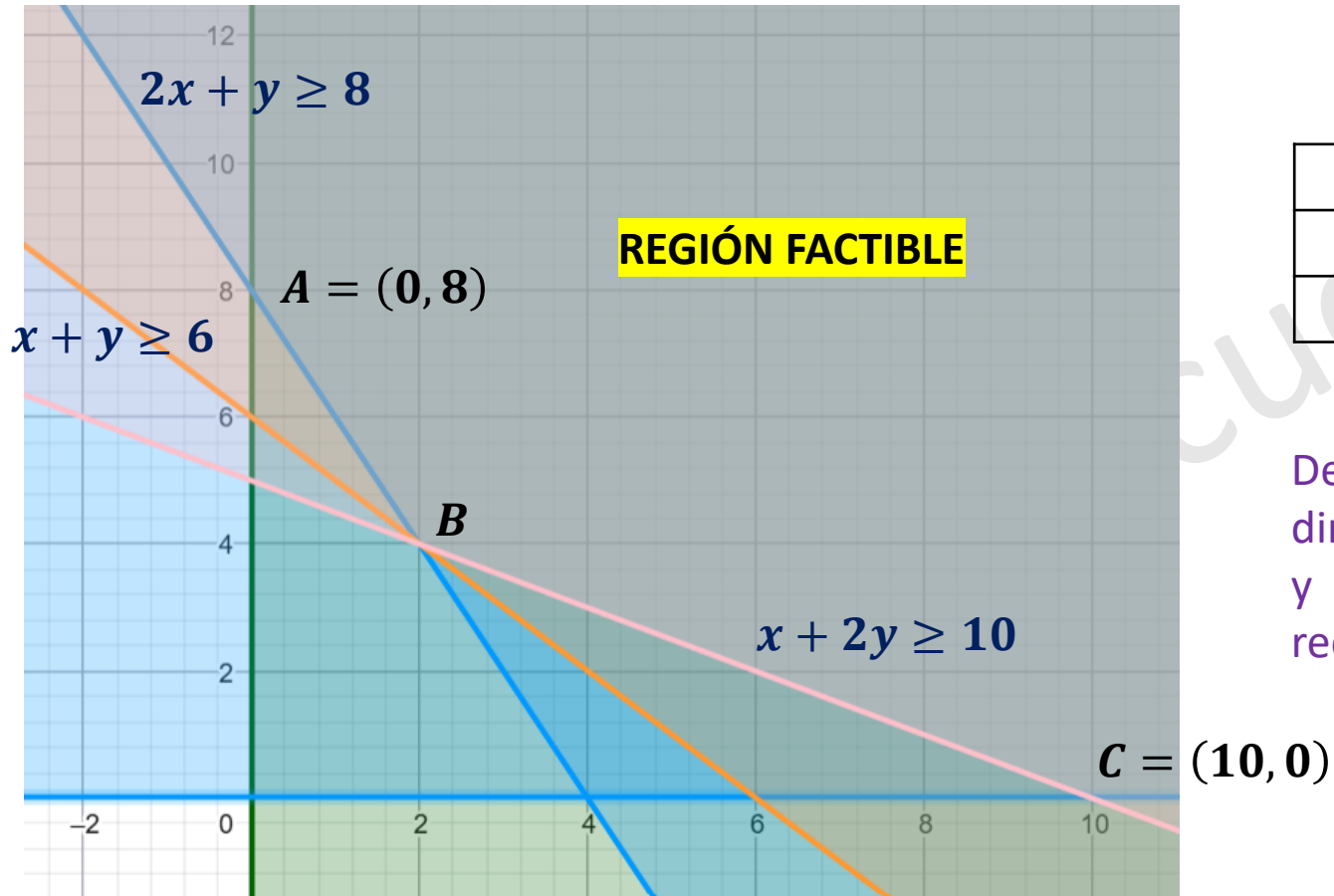
x	y
0	5
10	0

Compruebo si el (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$0 + 2 \cdot 0 \geq 10 \rightarrow$ **No cumple**

Representamos las inecuaciones y observamos cuál es la región factible.

$$\text{s. a. } \begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$2x + y = 8$$

x	y
0	8
4	0

$$x + y = 6$$

x	y
0	6
6	0

$$x + 2y = 10$$

x	y
0	5
10	0

Debemos calcular **el vértice B**, dos se obtienen directamente de los cortes con los ejes: $A = (0, 8)$ y $C = (10, 0)$. De la gráfica se deduce que las 3 rectas se cortan en el mismo punto.

Como las tres rectas se cortan en el mismo punto, basta con resolver un sistema formado por dos de ellas para calcular el vértice B .

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

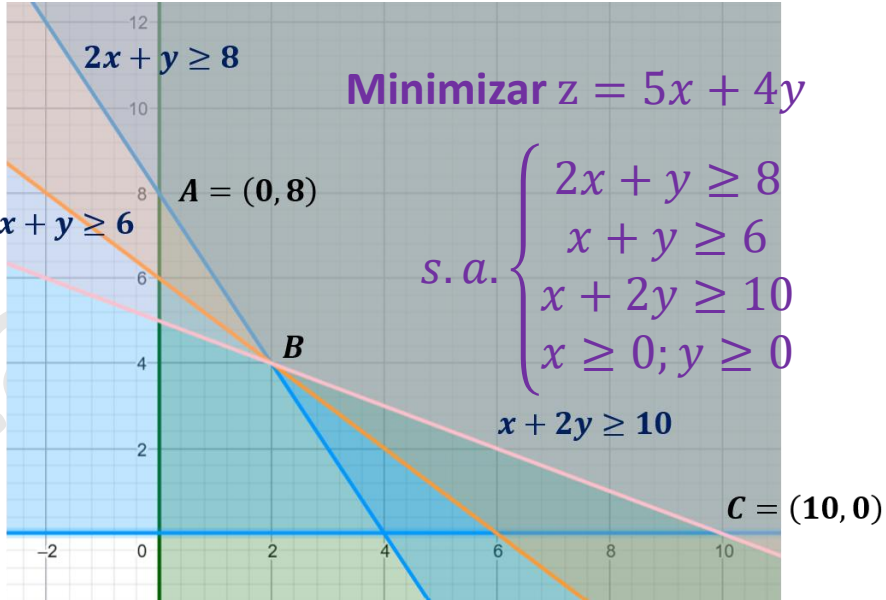
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{1} = 4$$

Siendo el vértice $B = (2, 4)$.

Compruebo que verifica la otra ecuación: $x + 2y = 10 \rightarrow 2 + 2 \cdot 4 = 10 \rightarrow 10 = 10$

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 5x + 4y$
0	8	$5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 = 32$
2	4	$5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 26$ (Mínimo)
10	0	$5 \cdot 10 + 4 \cdot 0 = 50$



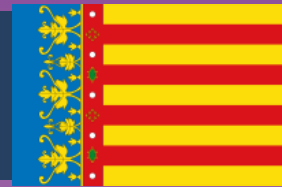
Solución

Solución: Para que el coste de la fertilización resulte mínimo se necesitan **2 L de NutriMax y 4 L de BioGrow**. Con esta mezcla el coste mínimo será de **26 €**.

x	y	$z = 5x + 4y$
0	8	$5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 = 32$
2	4	$5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 26$ (Mínimo)
10	0	$5 \cdot 10 + 4 \cdot 0 = 50$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO 2026

Análisis de funciones

Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo t (en años) y viene dado por la función:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c . *(1 punto)*
- b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. *(1 punto)*
- c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. *(0,5 puntos)*
- d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. *(1 punto)*

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $t = 1$ y $t = 2$. En el resto de los valores la función es continua por estar definida por funciones polinómicas y porque, aunque $t = 0$ anula los denominadores de los tramos racionales, ese valor no pertenece a dichos tramos.

Se estudia la continuidad de la función en $t = 1$.

$$g(1) = 1^2 + 2 = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} t^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{a}{t} + 2 = \frac{a}{1} + 2 = a + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) \rightarrow 3 = a + 2 \rightarrow a = 1$$

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $t = 2$.

$$g(2) = \frac{a}{2} + 2 \xrightarrow{a=1} g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{a}{t} + 2 = \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} ct + \frac{b}{t^2} = 2c + \frac{b}{2^2} = 2c + \frac{b}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) \rightarrow \frac{5}{2} = 2c + \frac{b}{4} \rightarrow b + 8c = 10$$

Como se dispone sólo de una ecuación y dos incógnitas, no se puede obtener el valor de ninguno de los dos parámetros. Se debe aplicar la condición que falta: $g'(3) = 23/27$.

Problema 2A

a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Se calcula la derivada del tercer trozo, ya que $2 < 3 \leq 4$

$$g'_3(t) = c - \frac{2b}{t^3} \quad \text{Se sustituye } t = 3. \quad g'_3(3) = c - \frac{2b}{3^3} = \frac{23}{27} \rightarrow c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27} \rightarrow 27c - 2b = 23$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} b + 8c = 10 \\ 27c - 2b = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} b &= 10 - 8c \\ 27c - 2(10 - 8c) &= 23 \end{aligned}$$

$$27c - 20 + 16c = 23 \rightarrow 43c = 43 \rightarrow c = 1$$

$$b = 10 - 8c = 10 - 8 \cdot 1 = 2$$

Los valores pedidos son: $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$.

Problema 2A

b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo.

Se calcula la derivada de cada uno de los trozos y se expresa como función definida a trozos y se analiza la monotonía de cada trozo.

El primer trozo es **creciente en su dominio** ya que: $g'_1(t) > 0$ si $0 < t < 1$

El segundo trozo es **decreciente en su dominio** ya que: $g'_2(t) < 0$ si $1 < t < 2$

$$g'_3(t) = 1 - \frac{4}{t^3} \rightarrow 1 - \frac{4}{t^3} = 0 \rightarrow \frac{4}{t^3} = 1 \rightarrow t^3 = 4 \rightarrow t = \sqrt[3]{4} \approx 1,59 \notin (2,4)$$

El tercer trozo es **creciente en su dominio** ya que: $g'_3(t) > 0$ si $2 < t < 4$

Se observa que el valor de mercado de la empresa **ha crecido con el primer y el tercer gerente, pero ha descendido con el segundo gerente.**

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2, & 1 < t \leq 2 \\ t + \frac{2}{t^2}, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

$$g'(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1, \\ -\frac{1}{t^2}, & 1 < t < 2 \\ 1 - \frac{4}{t^3}, & 2 < t < 4 \end{cases}$$

Problema 2A

c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado.

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2, & 1 < t \leq 2 \\ t + \frac{2}{t^2}, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

Anteriormente se ha comprobado que la función es continua y que no hay puntos críticos interiores en los intervalos abiertos de cada tramo. Por tanto, para estudiar los extremos absolutos y relativos, analizamos los puntos $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 4$, junto con los cambios de crecimiento.

$$g(0) = 0^2 + 2 = 2 \quad g(1) = 1^2 + 2 = 3 \quad g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2,5 \quad g(4) = 4 + \frac{2}{4^2} = \frac{66}{16} = \frac{33}{8} = 4,125$$

En $t = 0$ la función presenta un mínimo absoluto **(0, 2)**, ya que $g(0) = 2$ es el valor más pequeño que tiene la función.

En $t = 4$ la función presenta un máximo absoluto **(4, 33/8)**, ya que $g(4) = 33/8$ es el valor más grande que alcanza la función.

En $t = 1$ la función presenta un máximo relativo **(1, 3)**, ya que la función pasa de crecer a decrecer.

En $t = 2$ la función presenta un mínimo relativo **(2, 5/2)**, ya que la función pasa de decrecer a crecer.

NOTA: en $t=1$ y $t=2$ la función es continua pero no derivable, por eso el extremo relativo se detecta por el cambio de monotonía y no por la condición $g'(t) = 0$

NOTA: Observa que $g(4) > g(1)$ por eso, en $t = 1$ la función presenta un máximo relativo y no absoluto.

NOTA: Observa que $g(0) < g(2)$ por eso, en $t = 2$ la función presenta un mínimo relativo y no absoluto.

Problema 2A

d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente.

Anteriormente se ha comprobado que $g_1(t)$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área ya que el mínimo absoluto se encuentra por encima del eje X . Por ello, para calcular el salario basta con obtener el valor de la integral definida de $10^5 \cdot g_1(t)$ entre 0 y 1.

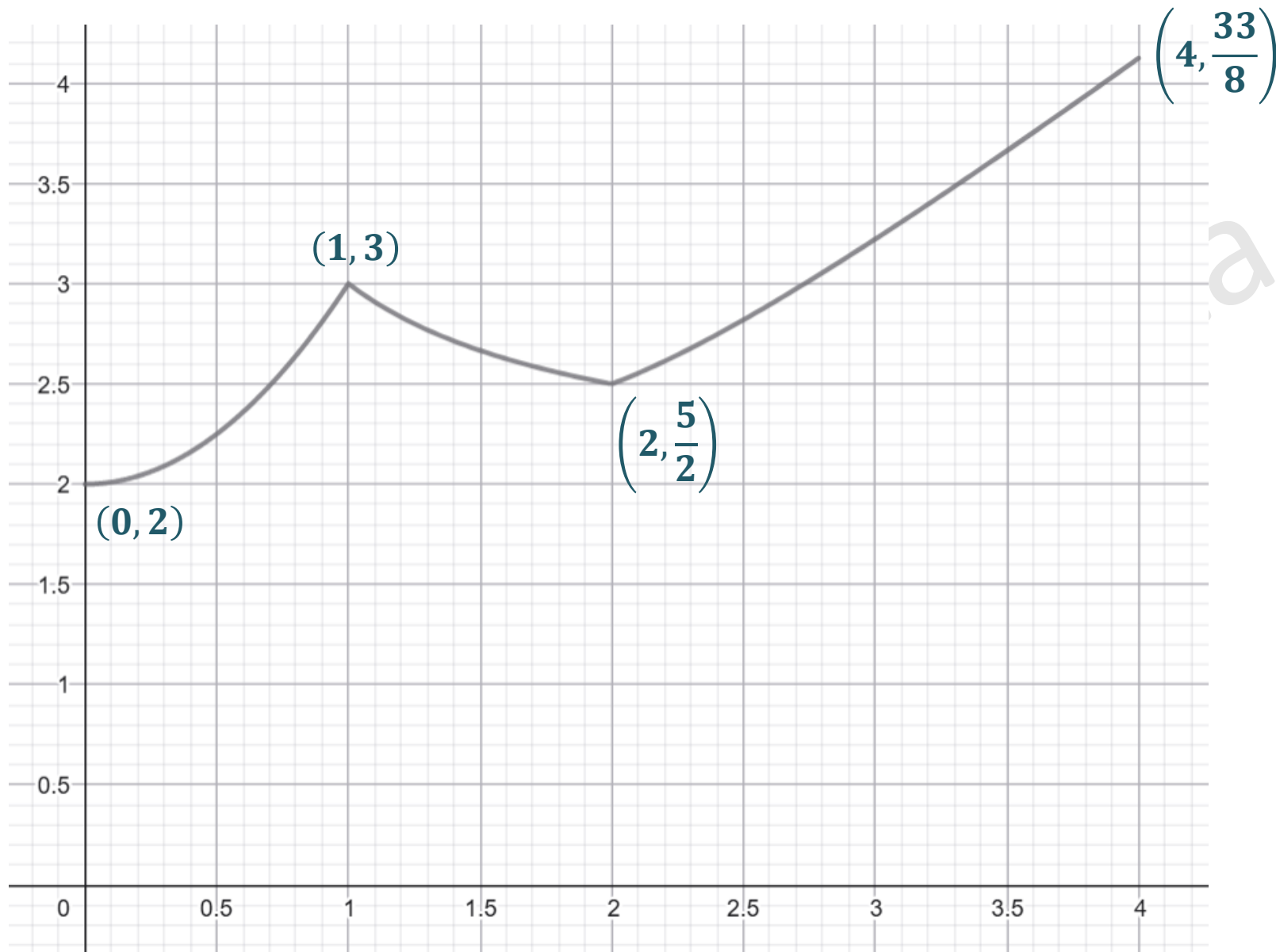
Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_0^1 10^5 \cdot g(t) dt = 10^5 \cdot \int_0^1 (t^2 + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2 \cdot t \right]_0^1 = 10^5 \cdot \left[\left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 \right) \right] = 10^5 \cdot \frac{7}{3}$$

$$\int_0^1 10^5 \cdot g(t) dt = \frac{7 \cdot 10^5}{3} \approx 233333,33 \text{ €}$$

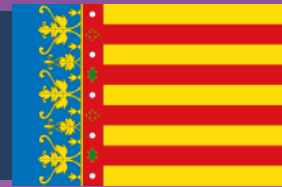
El salario del primer gerente fue de **233333,33 €**.

BONUS





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO 2026

Análisis de funciones

Problema 2B

Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x) = 400x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x) = 4x^2 + 100$.

a) Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa.

Se define la función beneficio.

$$B(x) = I(x) - G(x) = 400x - (4x^2 + 100) = -4x^2 + 400x - 100; \quad x \geq 0$$

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo absoluto está en el vértice.

$$B(x) = -4x^2 + 400x - 100 \quad \text{Siendo: } a = -4; \quad b = 400; \quad c = -100$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2 \cdot (-4)} = 50$$

El beneficio se maximiza al almacenar **50 terabytes de datos**.

Para calcular el beneficio máximo, se sustituye en la función $x = 50$.

$$B(50) = -4 \cdot 50^2 + 400 \cdot 50 - 100 = 9900$$

El beneficio máximo será de **9900 unidades monetarias**.

Problema 2B

Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x) = 400x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x) = 4x^2 + 100$.

a) Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa.

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas. $B(x) = -4x^2 + 400x - 100$

$$B'(x) = -8x + 400 \longrightarrow -8x + 400 = 0 \longrightarrow x = 50$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en $x = 50$

$$B''(x) = -8 \longrightarrow B''(50) = -8 < 0$$

El beneficio se maximiza al almacenar **50 terabytes de datos**.

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en $x = 50$ hay un máximo relativo, que en este caso es absoluto en el dominio $x \geq 0$, tal como habíamos calculado anteriormente. También podríamos llegar a esta misma conclusión mediante un estudio de signos de la función derivada.

Para calcular el beneficio máximo, se sustituye en la función $x = 50$.

$$B(50) = -4 \cdot 50^2 + 400 \cdot 50 - 100 = 9900$$

El beneficio máximo será de **9900 unidades monetarias**.

b) La ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima.

Se define la función ratio ingresos/gastos. $R(x) = \frac{I(x)}{G(x)} = \frac{400x}{4x^2 + 100}; \quad x \geq 0$

Se deriva la función y se iguala a cero.

$$R'(x) = \frac{400 \cdot (4x^2 + 100) - 400x \cdot 8x}{(4x^2 + 100)^2} = \frac{1600x^2 + 40000 - 3200x^2}{(4x^2 + 100)^2} = \frac{-1600x^2 + 40000}{(4x^2 + 100)^2}$$

$$\frac{-1600x^2 + 40000}{(4x^2 + 100)^2} = 0 \longrightarrow -1600x^2 + 40000 = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{40000}{1600} \longrightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Como $x \geq 0$, tomamos $x = 5$.

Se estudia el signo de la derivada:

	0	5	$+\infty$
$R'(x)$		+	-
$R(x)$			

Se calcula el valor de la máxima ratio: $R(5) = \frac{400 \cdot 5}{4 \cdot 5^2 + 100} = 10$

La cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima es **5 terabytes**, y la **eficiencia financiera máxima es 10**.

Problema 2B

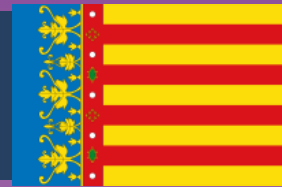
c) Calcula $\int_0^2 G(x)^2 dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 G(x)^2 dx &= \int_0^2 (4x^2 + 100)^2 dx = \int_0^2 (16x^4 + 800x^2 + 10000) dx = \left[16 \cdot \frac{x^5}{5} + 800 \cdot \frac{x^3}{3} + 10000 \cdot x \right]_0^2 = \\ &= \left(16 \cdot \frac{2^5}{5} + 800 \cdot \frac{2^3}{3} + 10000 \cdot 2 \right) - \left(16 \cdot \frac{0^5}{5} + 800 \cdot \frac{0^3}{3} + 10000 \cdot 0 \right) = \frac{512}{5} + \frac{6400}{3} + 20000 = \frac{333536}{15}\end{aligned}$$

$$\int_0^2 G(x)^2 dx = \frac{333536}{15}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JUNIO 2026

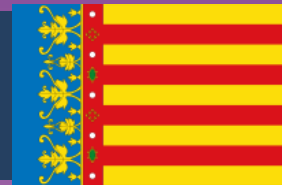
Probabilidad

©Angel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JUNIO 2026

Probabilidad

PROBLEMA 3

Problema 3. En una empresa de pinturas se sabe que hay tres tipos de empleados: becarios, aprendices y maestros. El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices. Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores y entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores. Se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores. Seleccionamos al azar un empleado de esta empresa.

- a) Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. *(1 punto)*
- b) Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz? *(1 punto)*
- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz". *(1 punto)*

www.

Problema 3. En una empresa de pinturas se sabe que hay tres tipos de empleados: becarios, aprendices y maestros. El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices. Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores y entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores. Se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores. Seleccionamos al azar un empleado de esta empresa.

- a) Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. *(1 punto)*

Primero asignamos una letra a cada suceso.

$B = \{\text{Becario}\}$ $A = \{\text{Aprendiz}\}$ $M = \{\text{Maestro}\}$ $S = \{\text{Estudios superiores}\}$ $\bar{S} = \{\text{No tiene estudios superiores}\}$

Se toman datos del enunciado: $P(B) = 0,50$ $P(A) = 0,35$ $P(M) = 1 - P(B) - P(A) = 1 - 0,5 - 0,35 = 0,15$

“Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores” $P(S/B) = 0,80$

“... entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores” $P(\bar{S}/M) = 0,15$

“... el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores” $P(S) = 0,79$

a) Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. (1 punto)

Con los datos obtenidos anteriormente se construye el diagrama de árbol.

Se calcula la incógnita con ayuda del teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(B) \cdot P(S/B) + P(A) \cdot P(S/A) + P(M) \cdot P(S/M)$$

$$0,79 = 0,5 \cdot 0,8 + 0,35 \cdot x + 0,15 \cdot 0,85$$

$$0,35x = 0,79 - 0,5 \cdot 0,8 - 0,15 \cdot 0,85 \longrightarrow 0,35x = 0,2625$$

$$x = \frac{0,2625}{0,35} = 0,75 \longrightarrow x = P(S/A) = 0,75$$

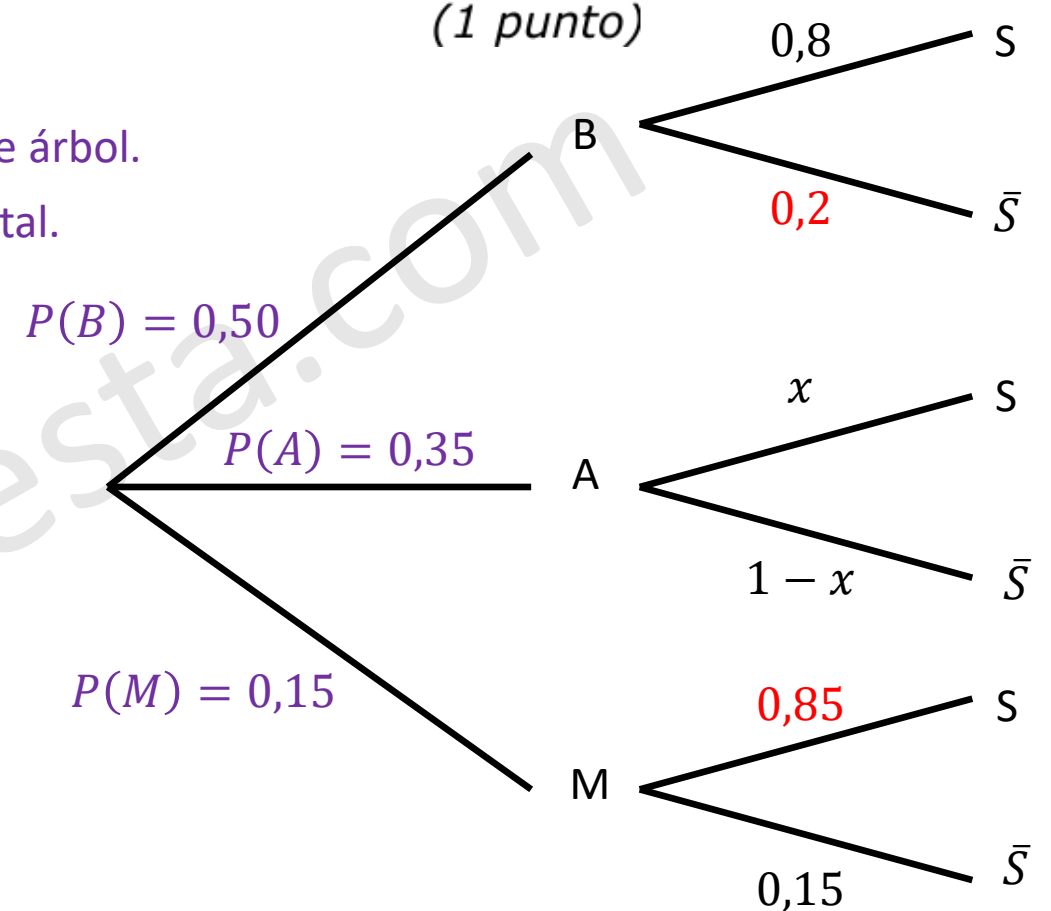
Calculo ahora la probabilidad pedida:

$$P(S \cap A) = P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = 0,35 \cdot 0,75 = 0,2625$$

La probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz es **0,2625 (26,25%)**.

NOTA: Se podría obtener el resultado aplicando: $P(S) = P(B \cap S) + P(A \cap S) + P(M \cap S)$

Y despejando: $P(A \cap S) = P(S) - P(B) \cdot P(S/B) - P(M) \cdot P(S/M)$

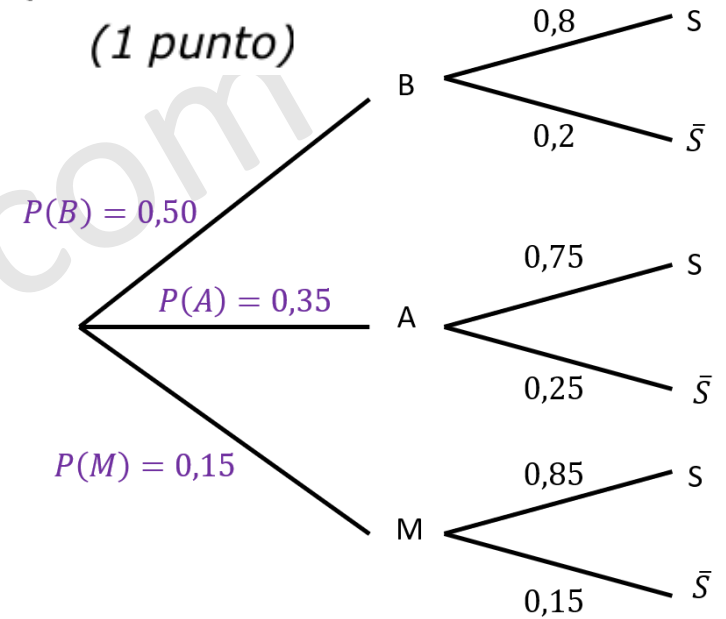


b) Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz?
(1 punto)

Se aplica el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{S}) = \frac{P(A \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{S}/A)}{1 - P(S)} = \frac{0,35 \cdot 0,25}{1 - 0,79} \approx 0,4167$$

Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, la probabilidad de que sea aprendiz es **0,4167 (41,67%)**.



c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz".

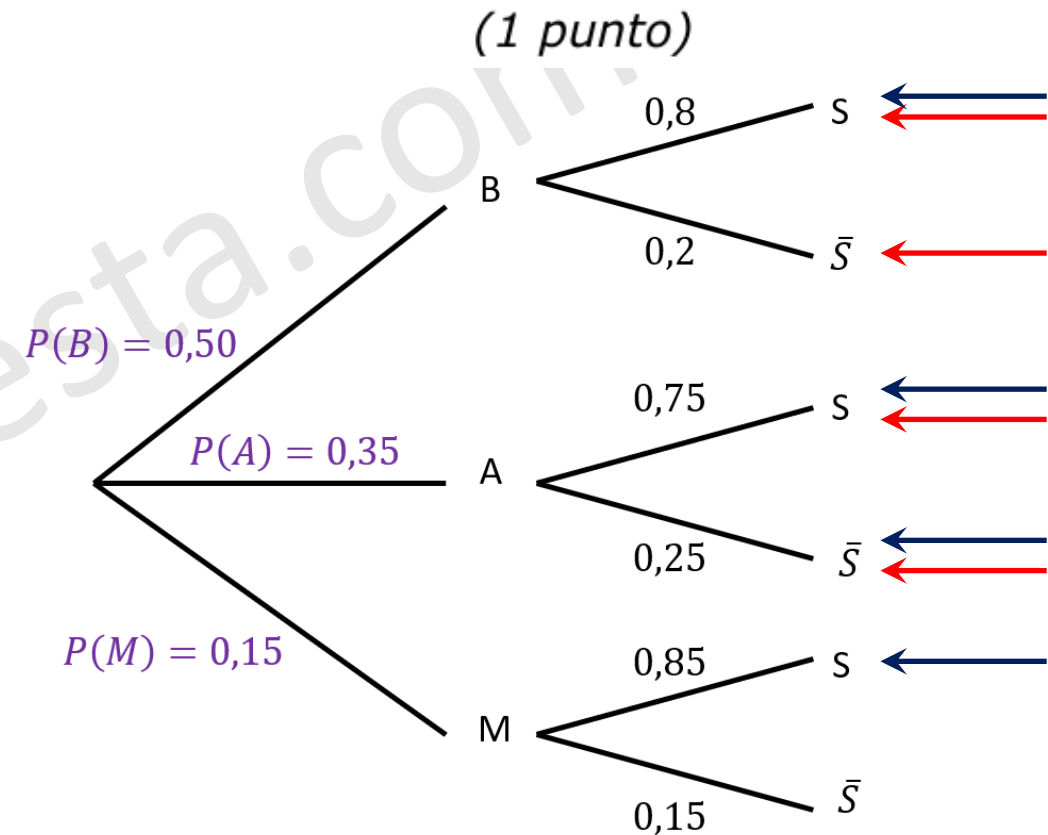
La probabilidad pedida es: $P((A \cup B) \cap (S \cup A))$

Simplificare la probabilidad pedida con ayuda del diagrama de árbol. Se muestran con distintos colores los sucesos $(A \cup B)$ y $(S \cup A)$. El suceso intersección es aquel en el que coinciden las dos flechas de distinto color.

$$P((A \cup B) \cap (S \cup A)) = P(B \cap S) + P(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,35$$

$$P((A \cup B) \cap (S \cup A)) = \mathbf{0,75}$$

La probabilidad pedida es **0,75 (75%)**.



BONUS

Puedes llegar a la misma conclusión aplicando el álgebra de conjuntos.

Aplico en primer lugar la propiedad distributiva.

$$(A \cup B) \cap (S \cup A) = (A \cap S) \cup (A \cap A) \cup (B \cap S) \cup (B \cap A) = (A \cap S) \cup A \cup (B \cap S)$$

Ya que: $(A \cap A) = A$; *idempotencia* $(B \cap A) = \emptyset$; *sucesos incompatibles*

$(A \cup B) \cap (S \cup A) = A \cup (B \cap S)$ Ya que: $(A \cap S) \cup A = A$; ya que $A \cap S$ está contenido en A ; propiedad de absorción.

Como los sucesos A y $(B \cap S)$ son sucesos incompatibles, podemos escribir:

$$P((A \cup B) \cap (S \cup A)) = P(A) + P(B \cap S)$$

Que es la expresión a la que habíamos llegado anteriormente por el método anterior.