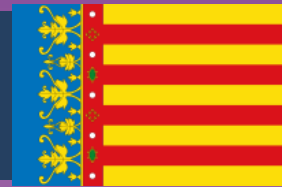




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO-RESERVA 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO–RESERVA 2026

Análisis de funciones

Problema 2B

Problema 2. B. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

www.a

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 4}{0^2 - 4} = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow A = (0, -1)$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

La función no tiene puntos de corte con el **eje X**.

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En esos valores puede haber una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^-} = -\infty \end{array} \right. , \text{luego } \boxed{x = -2 \text{ es una asíntota vertical de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Calculo el límite de la función en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right. , \text{luego } \boxed{x = 2 \text{ es una asíntota vertical de } f(x)}$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula estudiando el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$y = 1$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

©Angel Questa Ariza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 - 4) - (x^2 - 2x + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^2 + 8 - 2x^3 + 4x^2 - 8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{2x^2 - 16x + 8}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 16x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,536 \\ x = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,464 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	-2	$4 - 2\sqrt{3}$	2	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+	
$f(x)$						

$f(x)$ **decrece** en $(4 - 2\sqrt{3}, 2) \cup (2, 4 + 2\sqrt{3})$

$f(x)$ **crece** en $(-\infty, -2) \cup (-2, 4 - 2\sqrt{3}) \cup (4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-2	$4 - 2\sqrt{3}$	2	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-	+
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x = 4 - 2\sqrt{3}$ y un mínimo relativo en $x = 4 + 2\sqrt{3}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{(4 - 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) + 4}{(4 - 2\sqrt{3})^2 - 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866$$

Máximo relativo:

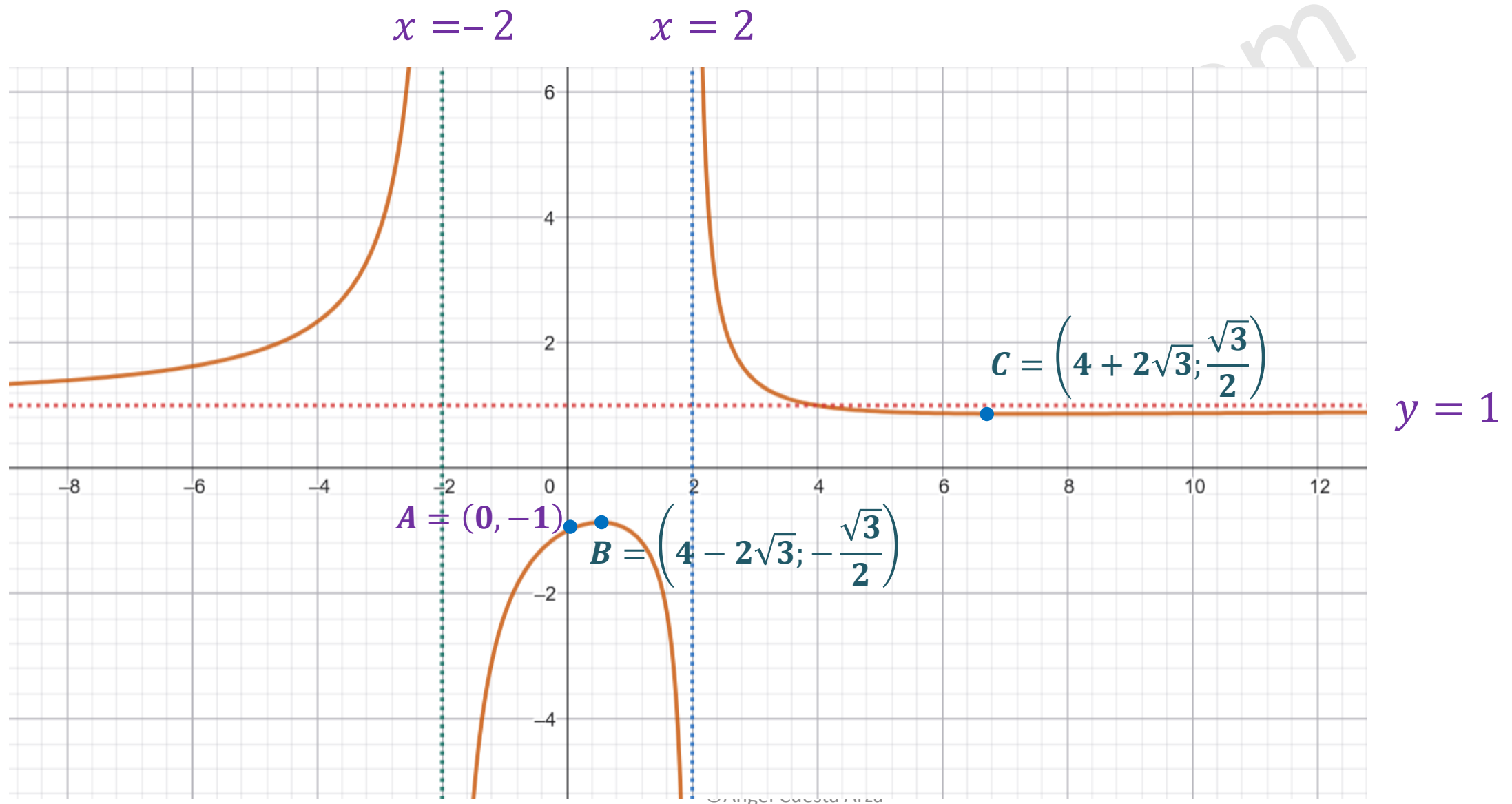
$$B = \left(4 - 2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) + 4}{(4 + 2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

Mínimo relativo:

$$C = \left(4 + 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



BONUS

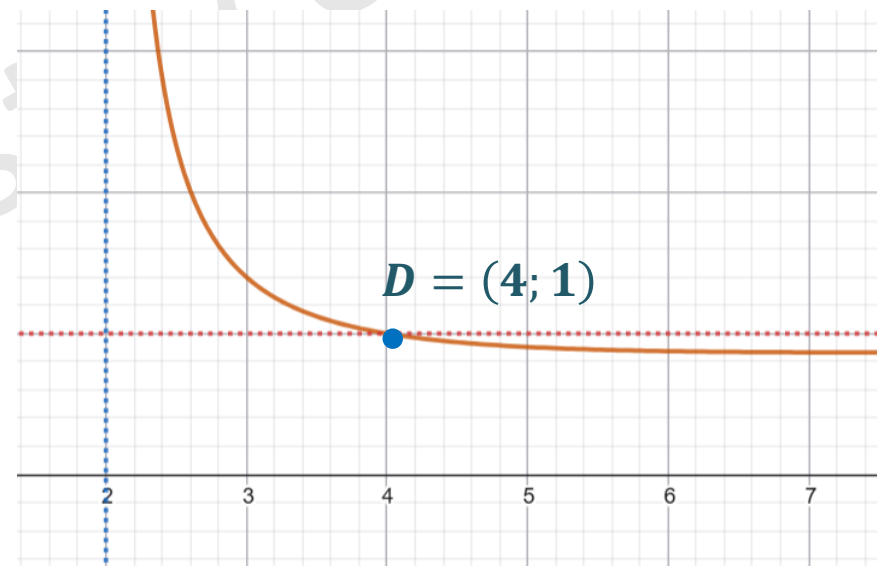
En esta gráfica se observa un hecho que inquieta a muchos estudiantes. La curva corta a la asíntota horizontal. Hay que decir que el único tipo de asíntota que la función no puede cortar es la vertical. Las asíntotas horizontales y oblicuas sí pueden ser cortadas por la curva. De hecho, voy a calcular el punto de corte con fines pedagógicos.

Se iguala la función a la asíntota horizontal.

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = x^2 - 4 \rightarrow -2x = -8 \rightarrow x = 4$$

El punto de corte entre la curva y la asíntota horizontal es **D = (4, 1)**

Se muestra la región de la gráfica correspondiente.



BONUS

Esta gráfica presenta un problema a la hora de su representación gráfica. El mínimo relativo es apenas perceptible ya que su valor es muy parecido al de la asíntota horizontal. Se hace un zoom en la gráfica para que se vea mejor.

