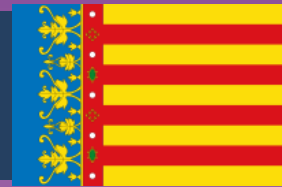




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO-RESERVA 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO–RESERVA 2026

Análisis de funciones

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x+1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto. *(0,75 puntos)*
- b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$. *(2 puntos)*
- c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$. *(0,75 puntos)*

WWW.2



Problema 2A

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 1$ y $x = 4$. En el resto de los valores la función es continua porque, aunque $x = -1$ anula el denominador del tramo racional, ese valor no pertenece a dicho tramo. En el tramo logarítmico hay que tener cuidado con el valor de a . Debemos asegurarnos de que el valor del argumento debe ser mayor que cero.

Se estudia la continuidad de la función en $x = 1$.

$$f(1) = \ln(1^2 + a) = \ln(1 + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + a) = \ln(1 + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \ln(1 + a) = 4 \rightarrow 1 + a = e^4 \rightarrow a = e^4 - 1 \approx 53,598$$



Problema 2A

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 4$.

$$f(4) = (4 + 1)^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x + 1)^2 = (4 + 1)^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 5x + \frac{b}{x + 1} = 5 \cdot 4 + \frac{b}{4 + 1} = 20 + \frac{b}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow 25 = 20 + \frac{b}{5} \rightarrow 5 = \frac{b}{5} \rightarrow b = 25$$

Los valores pedidos son: $a = e^4 - 1$; $b = 25$.

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$.

Se calcula la derivada de cada uno de los trozos y se expresa como función definida a trozos y se analiza la monotonía de cada trozo.

Se iguala a cero cada uno de los trozos que define la función.

$$\frac{2x}{x^2 + 54} = 0 \longrightarrow x = 0 \in (-\infty, 1)$$

$$2x + 2 = 0 \longrightarrow x = -1 \notin (1, 4)$$

$$5 - \frac{25}{(x+1)^2} = 0 \longrightarrow \frac{25}{(x+1)^2} = 5 \longrightarrow \frac{5}{x+1} = \pm\sqrt{5} \longrightarrow \frac{x+1}{5} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como coinciden los denominadores, se igualan los numeradores.

$$x + 1 = \pm\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{5} \notin (4, +\infty) \\ x = -1 - \sqrt{5} \notin (4, +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54), & x \leq 1, \\ (x+1)^2, & 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{25}{x+1}, & x > 4 \end{cases}$$

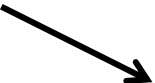
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54}, & x < 1, \\ 2x + 2, & 1 < x < 4 \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2}, & x > 4 \end{cases}$$

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1,5]$.

Se estudia el signo de la función derivada en cada uno de los tramos.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54}, & x < 1, \\ 2x + 2, & 1 < x < 4 \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2}, & x > 4 \end{cases}$$

	-1	0	1	4	5
$f'(x)$	-	+	+	+	
$f(x)$					

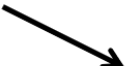
$$f'(-0,5) = \frac{2 \cdot (-0,5)}{(-0,5)^2 + 54} < 0 \quad f'(0,5) = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,5)^2 + 54} > 0 \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 > 0 \quad f'(4,5) = 5 - \frac{25}{(4,5 + 1)^2} > 0$$

Para el valor dado de $a = 54$ la función no es continua $x = 1$, en cambio para $b = 25$ la función si es continua en $x = 4$. Por tanto, no podemos asegurar que en $x = 0$ la función presenta un mínimo absoluto, ya que la función no es continua en $[-1,5]$. Para determinar los extremos absolutos se evalúa la función en los puntos de ruptura, en los valores inicial y final y en $x = 0$.

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1,5]$.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54), & x \leq 1, \\ (x + 1)^2, & 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{25}{x + 1}, & x > 4 \end{cases}$$

	-1	0	1	4	5
$f'(x)$	-	+	+	+	
$f(x)$					

$$f(-1) = \ln((-1)^2 + 54) = \ln 55 \approx 4$$

$$f(0) = \ln(0^2 + 54) = \ln 54 \approx 3,99$$

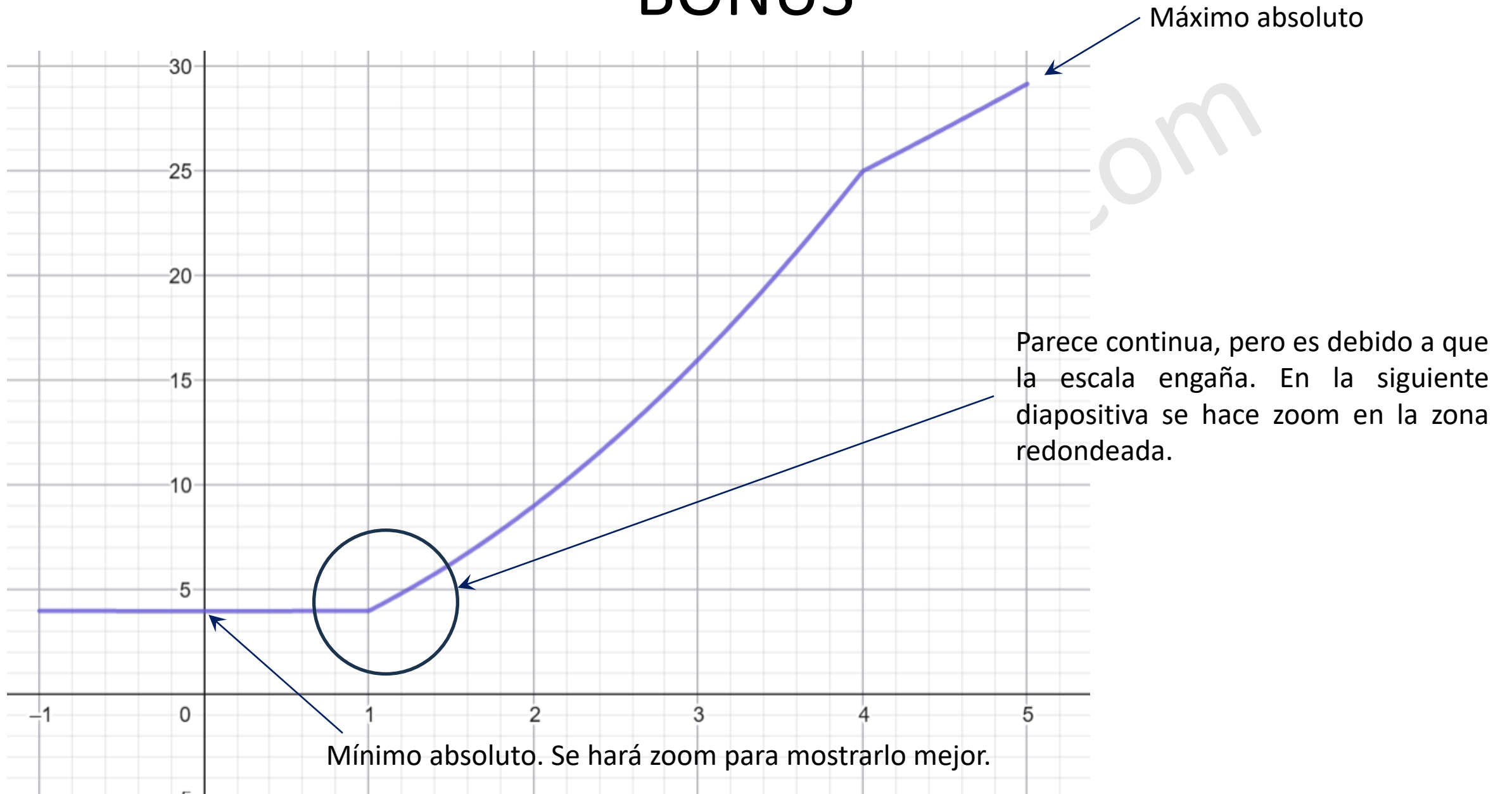
$$f(1) = \ln(1^2 + 54) = \ln 55 \approx 4$$

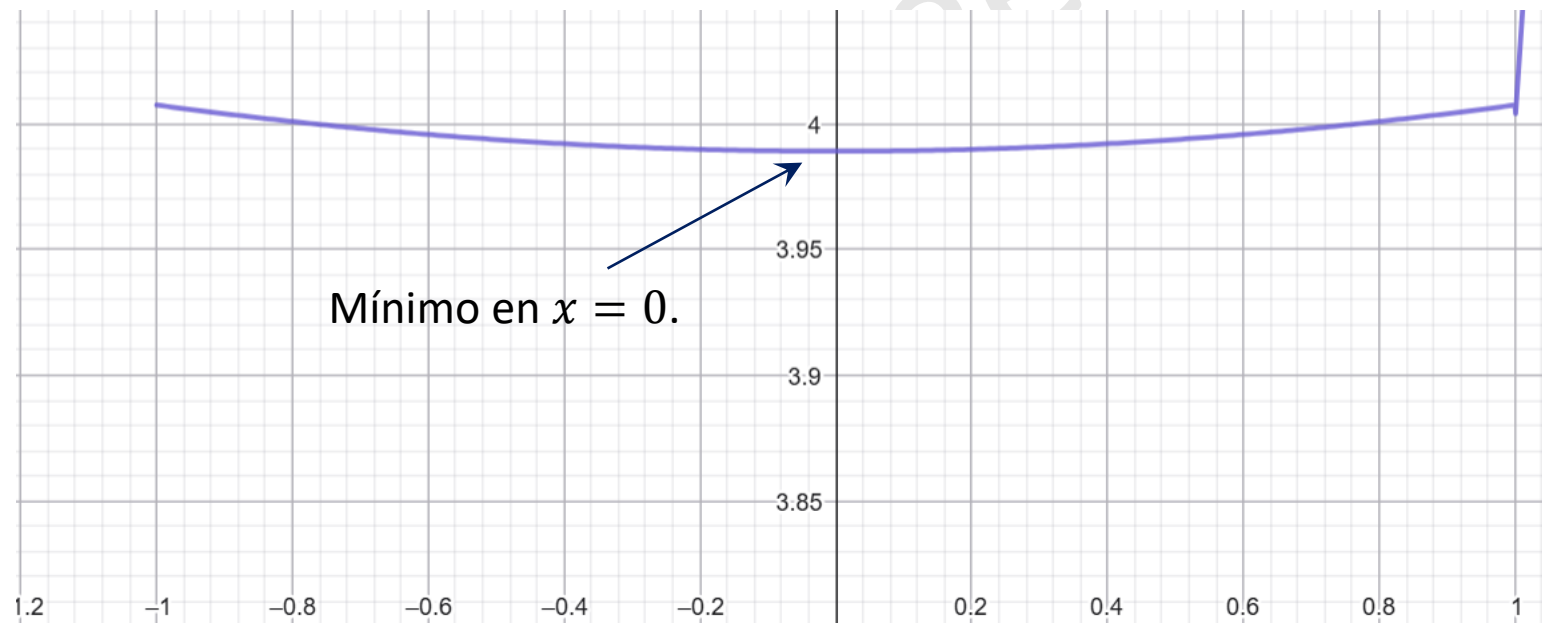
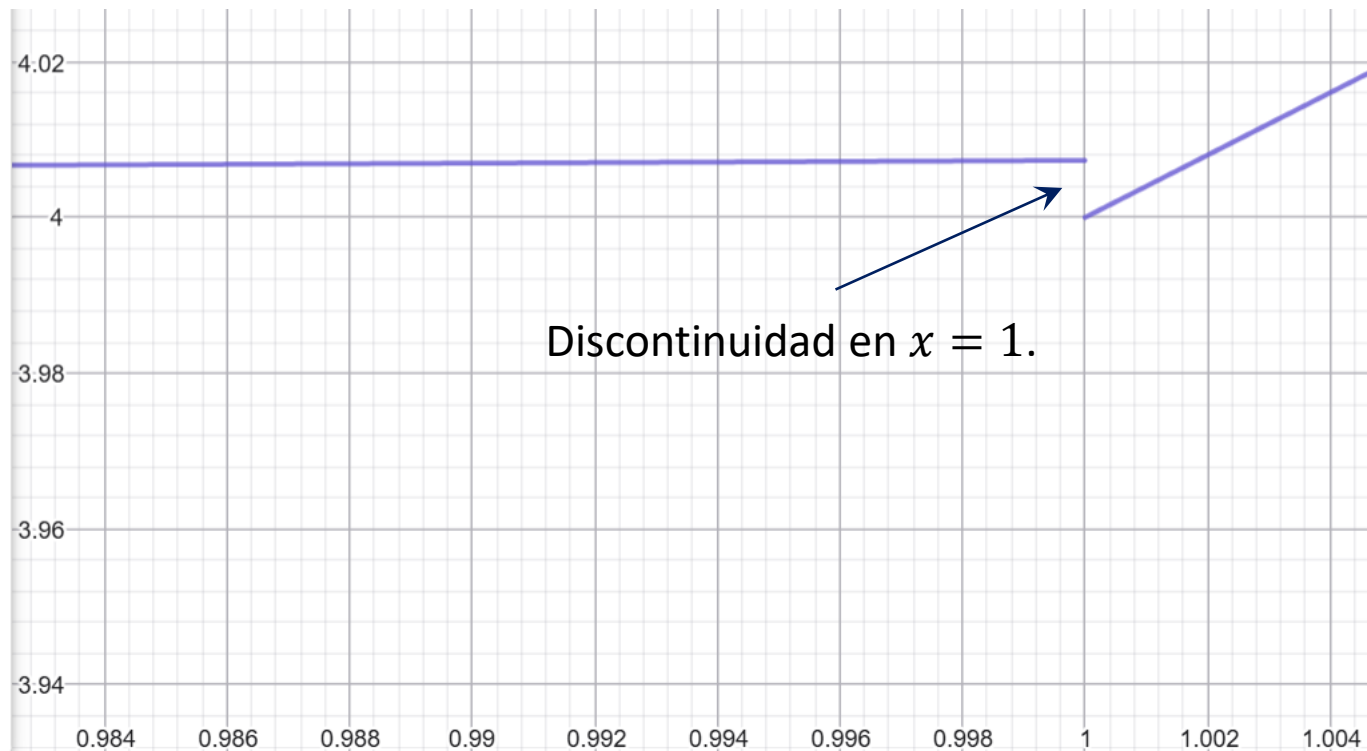
$$f(4) = (4 + 1)^2 = 25 \quad f(5) = 5 \cdot 5 + \frac{25}{5 + 1} = 25 + \frac{25}{6} = \frac{175}{6} \approx 29,17$$

En $x = 0$ la función presenta un mínimo absoluto, ya que $f(0) = \ln 54 \approx 3,99$ es el valor más pequeño que toma la función en $[-1,5]$. **El mínimo absoluto es $(0, \ln 54)$.** Aunque en $x = 1$ la función es discontinua (salto), el tramo de la derecha se aproxima a 4 sin alcanzarlo. Como $f(0) = \ln 54 \approx 3,99 < 4$, ese salto queda por encima del mínimo y no lo compromete: el valor más bajo de la función sigue siendo $f(0)$. Se muestra en las siguientes diapositivas con más detalle.

En $x = 5$ la función presenta un máximo absoluto, ya que $f(5) = 175/6 \approx 29,17$ es el valor más grande que tiene la función en el intervalo $[-1,5]$. El máximo absoluto es **$(5, 175/6)$**

BONUS





Problema 2A

c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$.

Es evidente que $f_2(x) = (x + 1)^2$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área. Por ello, para calcular el área basta con calcular integral definida de $f_2(x)$ entre 2 y 3.

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_2^3 (x + 1)^2 dx = \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_2^3 = \left(\frac{(3 + 1)^3}{3} \right) - \left(\frac{(2 + 1)^3}{3} \right) = \frac{64}{3} - \frac{27}{3} = \frac{37}{3}$$

El área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$ es **$37/3$** unidades de área.