



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JUNIO-RESERVA 2026

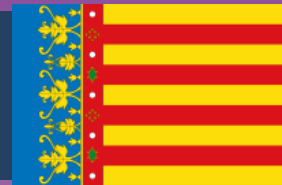
Programación lineal

© Angel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JUNIO-RESERVA 2026

Programación lineal

Problema 1A

Una empresa dedicada al desarrollo de videojuegos dispone de tres equipos de trabajo: uno formado por 8 personas encargadas del diseño de los personajes, otro compuesto por 15 personas responsables de la creación de las pantallas del juego, y un tercero de 14 personas dedicado al sonido y la ambientación. La empresa desarrolla juegos de consola y juegos de ordenador. Cada juego de consola genera un beneficio diario de 100 euros, mientras que cada juego de ordenador produce un beneficio diario de 90 euros. Para la elaboración de ambos tipos de juegos se requiere una persona del equipo de diseño de personajes. Además, para el diseño de las pantallas de un juego de consola se necesitan dos personas y para el de un juego de ordenador se necesita solo una. Para el sonido y la ambientación de un juego de ordenador se necesitan dos personas y para un juego de consola solo una. Se pide:

- ¿Cuántos juegos de consola y cuántos de ordenador se tienen que hacer para que el beneficio diario sea máximo?
- ¿Cuál es el beneficio diario máximo?

En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

x = número de juegos de consola.
 y = número de juegos de ordenador

		Diseño de personajes	Creación de pantallas	Sonido y ambientación	Beneficio diario
Consola	x	x	$2x$	x	100 €
Ordenador	y	y	y	$2y$	90 €

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

Problema 1A

		Diseño de personajes	Creación de pantallas	Sonido y ambientación	Beneficio diario
Consola	x	x	$2x$	x	100 €
Ordenador	y	y	y	$2y$	90 €

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

“uno formado por 8 personas encargadas del diseño de los personajes” $\longrightarrow x + y \leq 8$

“15 personas responsables de la creación de las pantallas del juego” $\longrightarrow 2x + y \leq 15$

“un tercero de 14 personas dedicado al sonido y la ambientación” $\longrightarrow x + 2y \leq 14$

“restricciones triviales” $\longrightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La función objetivo está definida por el beneficio: $z = 100x + 90y$

Problema 1A

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Maximizar $z = 100x + 90y$

$$\text{s. a. } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(a) $x + y \leq 8$

Expreso la recta: $x + y = 8$

Se dan valores para representar:

x	y
0	8
8	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$0 + 0 \leq 8 \rightarrow \text{Sí cumple; } (0, 0) \in \{x + y \leq 8\}$$

(b) $2x + y \leq 15$

Expreso la recta: $2x + y = 15$

Se dan valores para representar:

x	y
0	15
7,5	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 15 \rightarrow \text{Sí cumple; } (0, 0) \in \{2x + y \leq 15\}$$

(c) $x + 2y \leq 14$

Expreso la recta: $x + 2y = 14$

Se dan valores para representar:

x	y
0	7
14	0

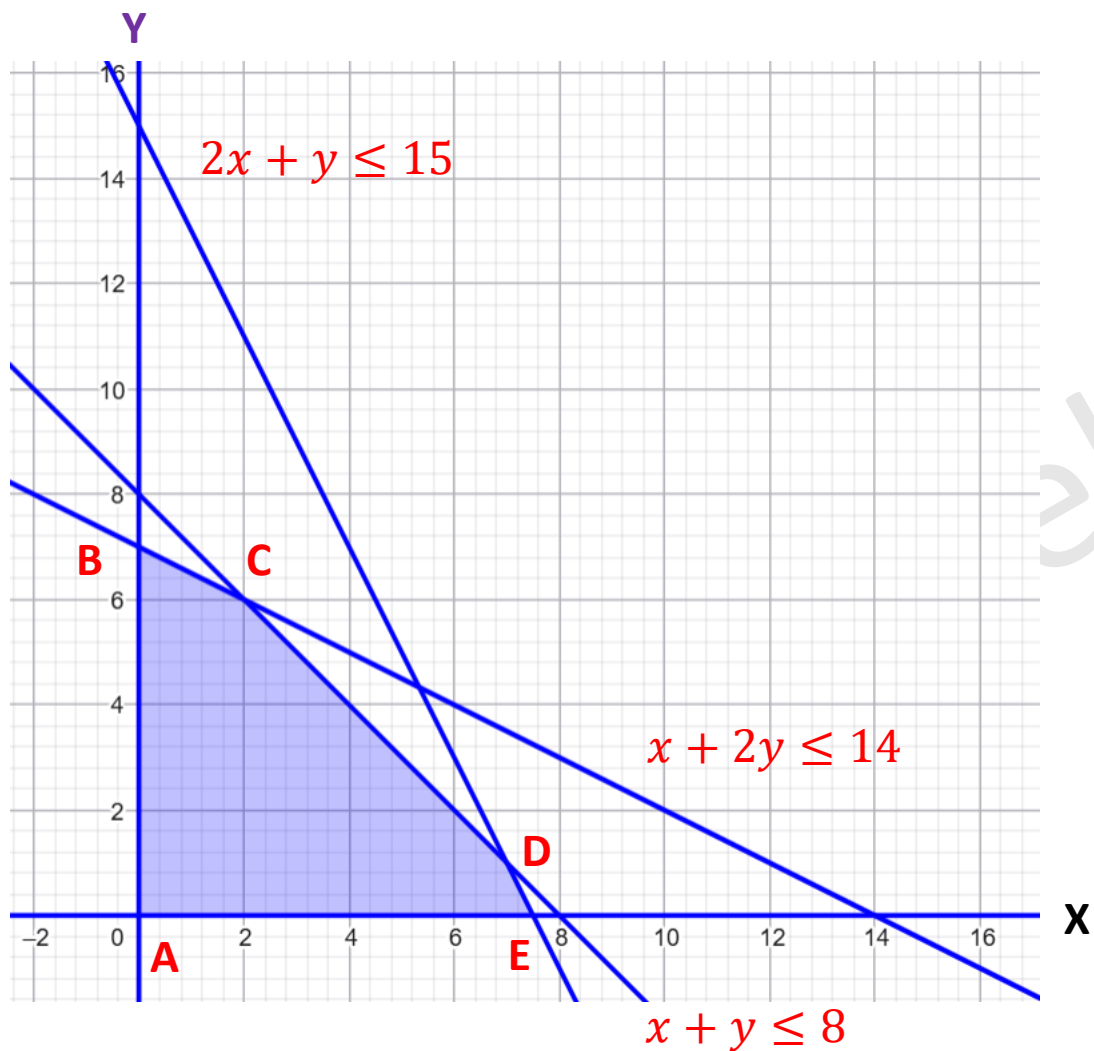
Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 14 \rightarrow \text{Sí cumple; } (0, 0) \in \{x + 2y \leq 14\}$$

Problema 1A

Representamos las inecuaciones y observamos cuál es la región factible.

$$\text{s. a. } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$x + y = 8$$

x	y
0	8
8	0

$$2x + y = 15$$

x	y
0	15
7,5	0

$$x + 2y = 14$$

x	y
0	7
14	0

$$0 + 0 \leq 8 \quad (0,0) \in \{x + y \leq 8\}$$

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 15 \quad (0,0) \in \{2x + y \leq 15\}$$

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 14 \quad (0,0) \in \{x + 2y \leq 14\}$$

Problema 1A

Para calcular los vértices C y D , se deben resolver los sistemas de ecuaciones formados por las rectas que dan lugar a dichos vértices. Los vértices A , B y E , no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas.

Vértice C:
$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

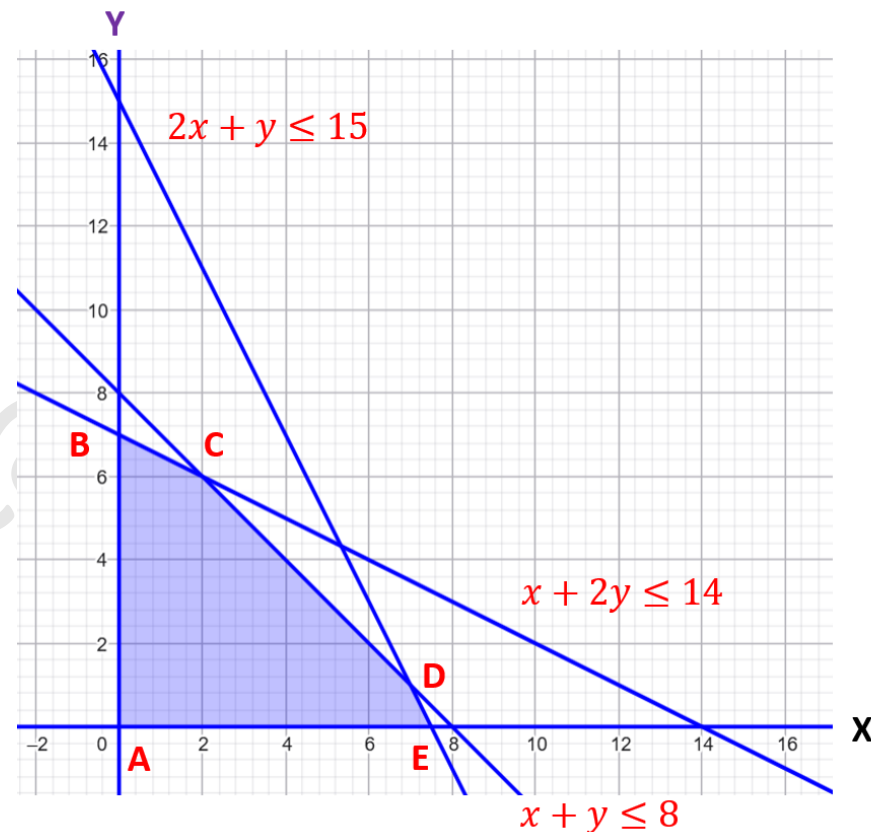
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Las coordenadas del vértice C son: $C = (2, 6)$

Vértice D:
$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$
 Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

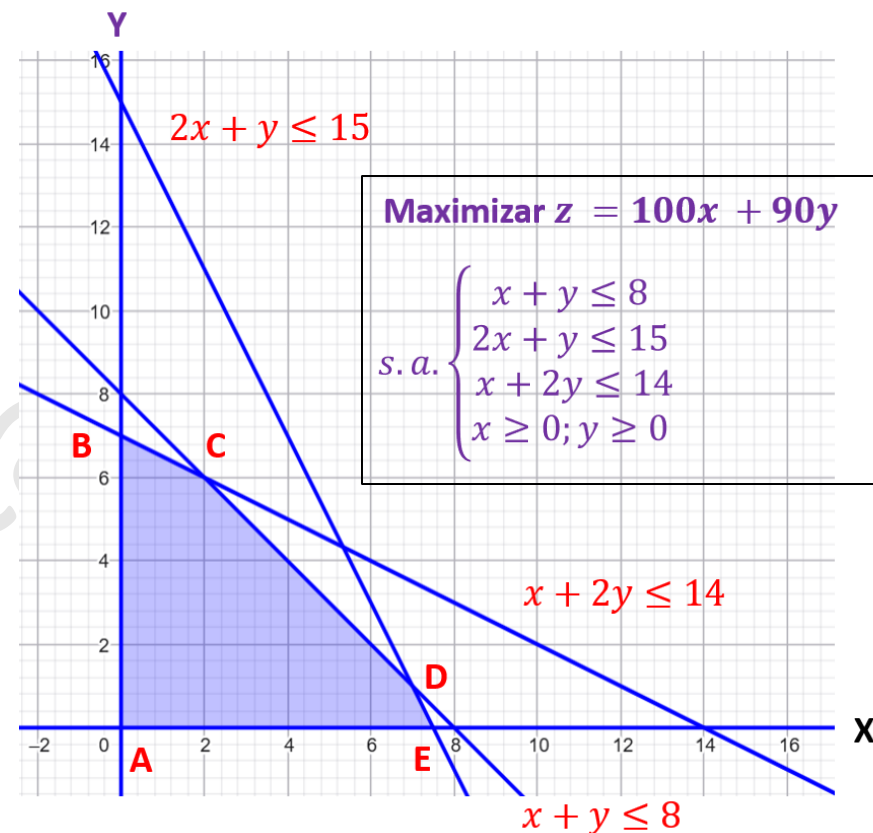
Las coordenadas del vértice D son: $D = (7, 1)$



Problema 1A

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 100x + 90y$
0	0	$100 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$
0	7	$100 \cdot 0 + 90 \cdot 7 = 630$
2	6	$100 \cdot 2 + 90 \cdot 6 = 740$
7	1	$100 \cdot 7 + 90 \cdot 1 = 790$ (máximo).
7,5	0	$100 \cdot 7,5 + 90 \cdot 0 = 750$



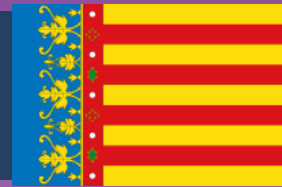
Problema 1A

Solución: debe hacer **7 juegos de consola y 1 juego de ordenador**.
Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el beneficio (máximo) será de **790 euros al día**.

x	y	$z = 100x + 90y$
0	0	$100 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$
0	7	$100 \cdot 0 + 90 \cdot 7 = 630$
2	6	$100 \cdot 2 + 90 \cdot 6 = 740$
7	1	$100 \cdot 7 + 90 \cdot 1 = 790$ (<i>máximo</i>).
7,5	0	$100 \cdot 7,5 + 90 \cdot 0 = 750$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JUNIO-RESERVA 2026

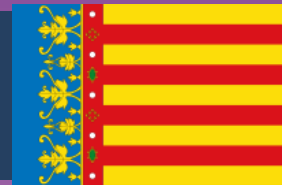
Problema de sistemas de ecuaciones

©Angel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JUNIO-RESERVA 2026



Problema de sistemas de ecuaciones

PROBLEMA 1B

Una empresa estudia los precios de la subscripción a las plataformas de streaming Metfilm, Lamparx y Tuing. En el año 2023 con 1850€ se pudieron contratar 40 subscripciones a Metfilm, 50 a Lamparx y 20 a Tuing. En 2024, Metfilm y Lamparx subieron la cuota 1€ mientras que Tuing mantuvo el precio y, con el mismo presupuesto, se tuvieron que reducir 2 subscripciones de Metfilm y 3 de Lamparx, pero se pudo mantener el número de subscripciones a Tuing. Teniendo en cuenta que Metfilm era 5€ más cara que Lamparx en el año 2023, calcula el coste de subscripción de cada compañía en cada año.

En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x = coste de una subscripción a Metfilm en 2023.
 y = coste de una subscripción a Lamparx en 2023.
 z = coste de una subscripción a Tuing en 2023.

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

“... con 1850€ se pudieron contratar 40 subscripciones a Metfilm, 50 a Lamparx y 20 a Tuing.” $\rightarrow 40x + 50y + 20z = 1850$

“... Metfilm y Lamparx subieron la cuota 1€ mientras que Tuing mantuvo el precio y, con el mismo presupuesto, se tuvieron que reducir 2 subscripciones de Metfilm y 3 de Lamparx, pero se pudo mantener el número de subscripciones a Tuing”

$$\begin{aligned}\rightarrow & (40 - 2) \cdot (x + 1) + (50 - 3) \cdot (y + 1) + 20z = 1850 \\ & 38x + 38 + 47y + 47 + 20z = 1850 \\ & 38x + 47y + 20z = 1765\end{aligned}$$

“Teniendo en cuenta que Metfilm era 5€ más cara que Lamparx en el año 2023” $\rightarrow x = y + 5 \rightarrow x - y = 5$



PROBLEMA 1B

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 40x + 50y + 20z = 1850 \\ 38x + 47y + 20z = 1765 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 5y + 2z = 185 \\ 38x + 47y + 20z = 1765 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 185 & 5 & 2 \\ 1765 & 47 & 20 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 38 & 47 & 20 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{200}{10} = 20 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 185 & 2 \\ 38 & 1765 & 20 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 38 & 47 & 20 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{150}{10} = 15$$

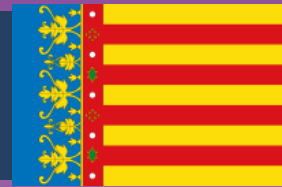
$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 185 \\ 38 & 47 & 1765 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 38 & 47 & 20 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{150}{10} = 15$$

Solución: La suscripción a Metfilm costaba en 2023 **20 €**, a Lamparx **15 €** y a Tuing **15 €**.





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO-RESERVA 2026

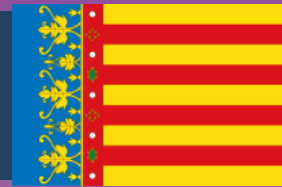
Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JUNIO–RESERVA 2026

Análisis de funciones

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto. *(0,75 puntos)*
- b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$. *(2 puntos)*
- c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$. *(0,75 puntos)*

WWW.α



Problema 2A

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 1$ y $x = 4$. En el resto de los valores la función es continua porque, aunque $x = -1$ anula el denominador del tramo racional, ese valor no pertenece a dicho tramo. En el tramo logarítmico hay que tener cuidado con el valor de a . Debemos asegurarnos de que el valor del argumento debe ser mayor que cero.

Se estudia la continuidad de la función en $x = 1$.

$$f(1) = \ln(1^2 + a) = \ln(1 + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + a) = \ln(1 + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \ln(1 + a) = 4 \rightarrow 1 + a = e^4 \rightarrow a = e^4 - 1 \approx 53,598$$



Problema 2A

a) Estudia la continuidad de la función y determina cuáles deben ser los valores de a y b para que sea continua en todo punto.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 4$.

$$f(4) = (4 + 1)^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x + 1)^2 = (4 + 1)^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 5x + \frac{b}{x + 1} = 5 \cdot 4 + \frac{b}{4 + 1} = 20 + \frac{b}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow 25 = 20 + \frac{b}{5} \rightarrow 5 = \frac{b}{5} \rightarrow b = 25$$

Los valores pedidos son: $a = e^4 - 1$; $b = 25$.

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1, 5]$.

Se calcula la derivada de cada uno de los trozos y se expresa como función definida a trozos y se analiza la monotonía de cada trozo.

Se iguala a cero cada uno de los trozos que define la función.

$$\frac{2x}{x^2 + 54} = 0 \rightarrow x = 0 \in (-\infty, 1)$$

$$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \notin (1, 4)$$

$$5 - \frac{25}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \frac{25}{(x+1)^2} = 5 \rightarrow \frac{5}{x+1} = \pm\sqrt{5} \rightarrow \frac{x+1}{5} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como coinciden los denominadores, se igualan los numeradores.

$$x + 1 = \pm\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{5} \notin (4, +\infty) \\ x = -1 - \sqrt{5} \notin (4, +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54), & x \leq 1, \\ (x+1)^2, & 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{25}{x+1}, & x > 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54}, & x < 1, \\ 2x + 2, & 1 < x < 4 \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2}, & x > 4 \end{cases}$$

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1,5]$.

Se estudia el signo de la función derivada en cada uno de los tramos.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 54}, & x < 1, \\ 2x + 2, & 1 < x < 4 \\ 5 - \frac{25}{(x+1)^2}, & x > 4 \end{cases}$$

	-1	0	1	4	5
$f'(x)$	-	+	+	+	
$f(x)$					

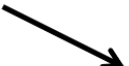
$$f'(-0,5) = \frac{2 \cdot (-0,5)}{(-0,5)^2 + 54} < 0 \quad f'(0,5) = \frac{2 \cdot 0,5}{(0,5)^2 + 54} > 0 \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 > 0 \quad f'(4,5) = 5 - \frac{25}{(4,5 + 1)^2} > 0$$

Para el valor dado de $a = 54$ la función no es continua $x = 1$, en cambio para $b = 25$ la función si es continua en $x = 4$. Por tanto, no podemos asegurar que en $x = 0$ la función presenta un mínimo absoluto, ya que la función no es continua en $[-1,5]$. Para determinar los extremos absolutos se evalúa la función en los puntos de ruptura, en los valores inicial y final y en $x = 0$.

Problema 2A

b) Supongamos que $a = 54$ y que $b = 25$. Determina el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[-1,5]$.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54), & x \leq 1, \\ (x + 1)^2, & 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{25}{x + 1}, & x > 4 \end{cases}$$

	-1	0	1	4	5
$f'(x)$	-	+	+	+	
$f(x)$					

$$f(-1) = \ln((-1)^2 + 54) = \ln 55 \approx 4$$

$$f(0) = \ln(0^2 + 54) = \ln 54 \approx 3,99$$

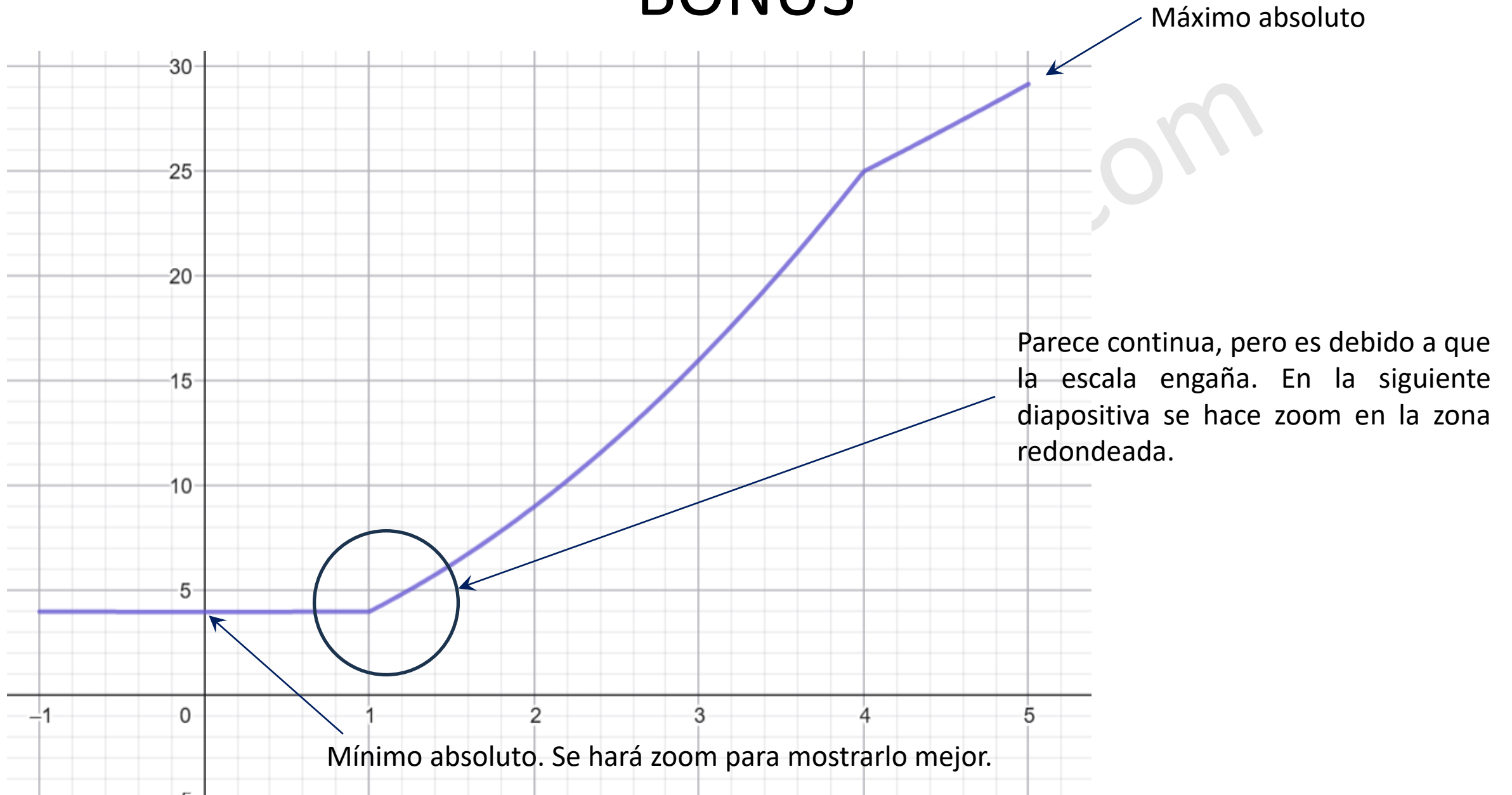
$$f(1) = \ln(1^2 + 54) = \ln 55 \approx 4$$

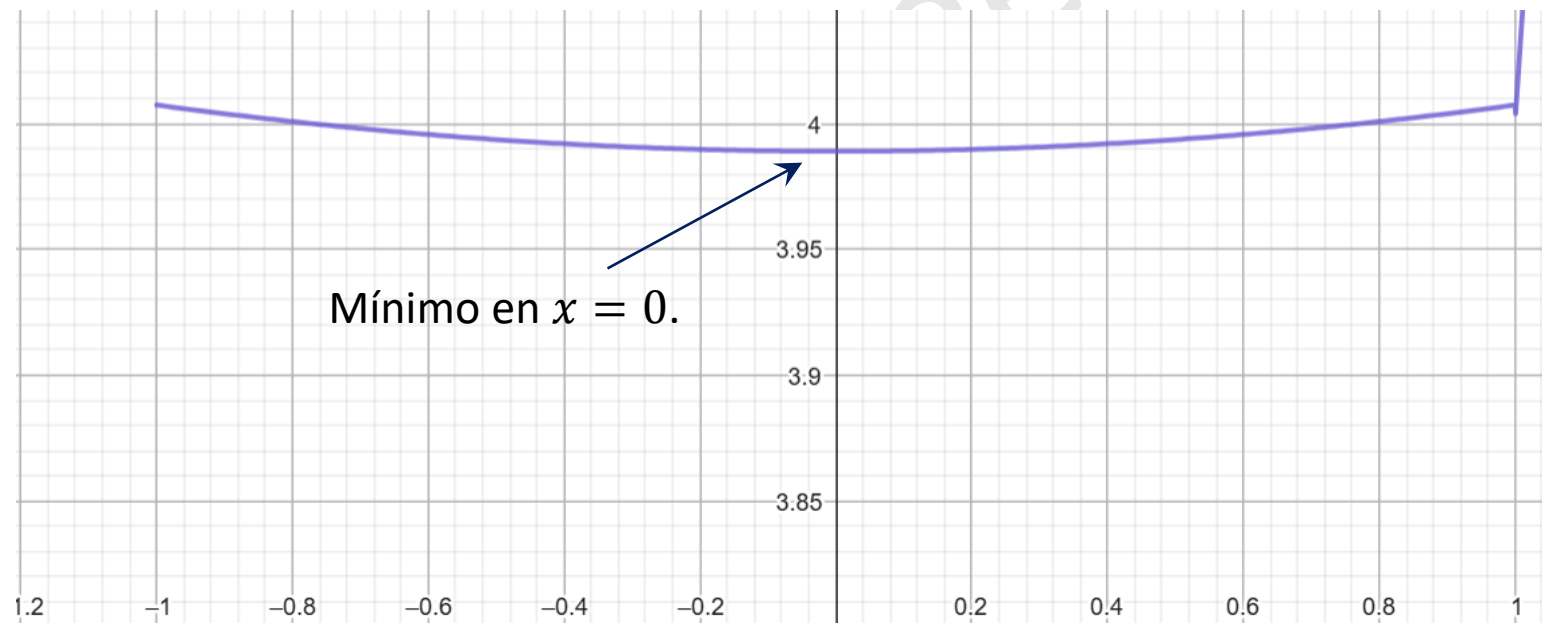
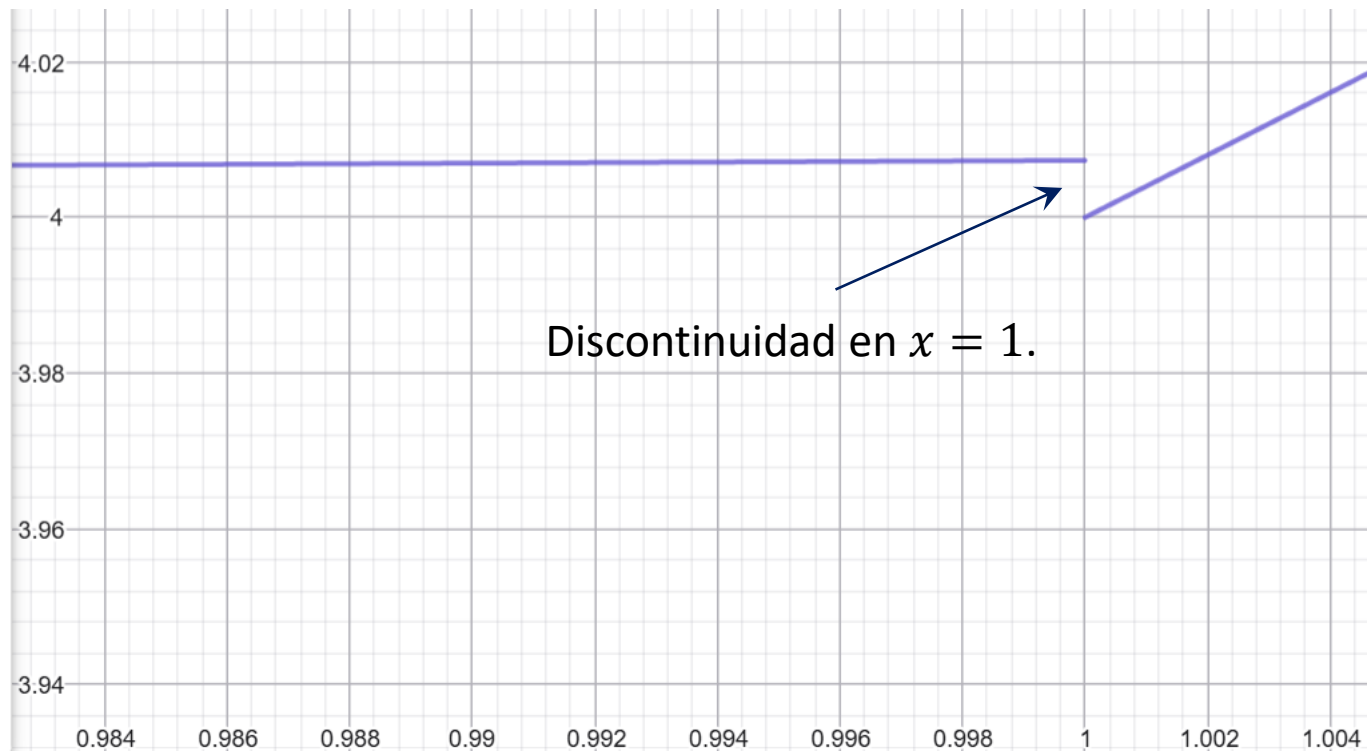
$$f(4) = (4 + 1)^2 = 25 \quad f(5) = 5 \cdot 5 + \frac{25}{5 + 1} = 25 + \frac{25}{6} = \frac{175}{6} \approx 29,17$$

En $x = 0$ la función presenta un mínimo absoluto, ya que $f(0) = \ln 54 \approx 3,99$ es el valor más pequeño que toma la función en $[-1,5]$. **El mínimo absoluto es $(0, \ln 54)$.** Aunque en $x = 1$ la función es discontinua (salto), el tramo de la derecha se aproxima a 4 sin alcanzarlo. Como $f(0) = \ln 54 \approx 3,99 < 4$, ese salto queda por encima del mínimo y no lo compromete: el valor más bajo de la función sigue siendo $f(0)$. Se muestra en las siguientes diapositivas con más detalle.

En $x = 5$ la función presenta un máximo absoluto, ya que $f(5) = 175/6 \approx 29,17$ es el valor más grande que tiene la función en el intervalo $[-1,5]$. El máximo absoluto es **$(5, 175/6)$**

BONUS





Problema 2A

c) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$.

Es evidente que $f_2(x) = (x + 1)^2$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área. Por ello, para calcular el área basta con calcular integral definida de $f_2(x)$ entre 2 y 3.

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_2^3 (x + 1)^2 dx = \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_2^3 = \left(\frac{(3 + 1)^3}{3} \right) - \left(\frac{(2 + 1)^3}{3} \right) = \frac{64}{3} - \frac{27}{3} = \frac{37}{3}$$

El área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta de ecuación $x = 3$ es **$37/3$** unidades de área.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO-RESERVA 2026

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JUNIO-RESERVA 2026

Análisis de funciones

Problema 2B

Problema 2. B. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

www.a

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 4}{0^2 - 4} = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow A = (0, -1)$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

La función no tiene puntos de corte con el **eje X**.

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En esos valores puede haber una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^-} = -\infty \end{array} \right. , \text{luego } \boxed{x = -2 \text{ es una asíntota vertical de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Calculo el límite de la función en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right. , \text{luego } \boxed{x = 2 \text{ es una asíntota vertical de } f(x)}$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula estudiando el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$y = 1$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

©Angel Questa Ariza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 - 4) - (x^2 - 2x + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^2 + 8 - 2x^3 + 4x^2 - 8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{2x^2 - 16x + 8}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 16x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,536 \\ x = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,464 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	-2	$4 - 2\sqrt{3}$	2	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+	
$f(x)$						

$f(x)$ **decrece** en $(4 - 2\sqrt{3}, 2) \cup (2, 4 + 2\sqrt{3})$

$f(x)$ **crece** en $(-\infty, -2) \cup (-2, 4 - 2\sqrt{3}) \cup (4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-2	$4 - 2\sqrt{3}$	2	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+	
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x = 4 - 2\sqrt{3}$ y un mínimo relativo en $x = 4 + 2\sqrt{3}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{(4 - 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) + 4}{(4 - 2\sqrt{3})^2 - 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866$$

Máximo relativo:

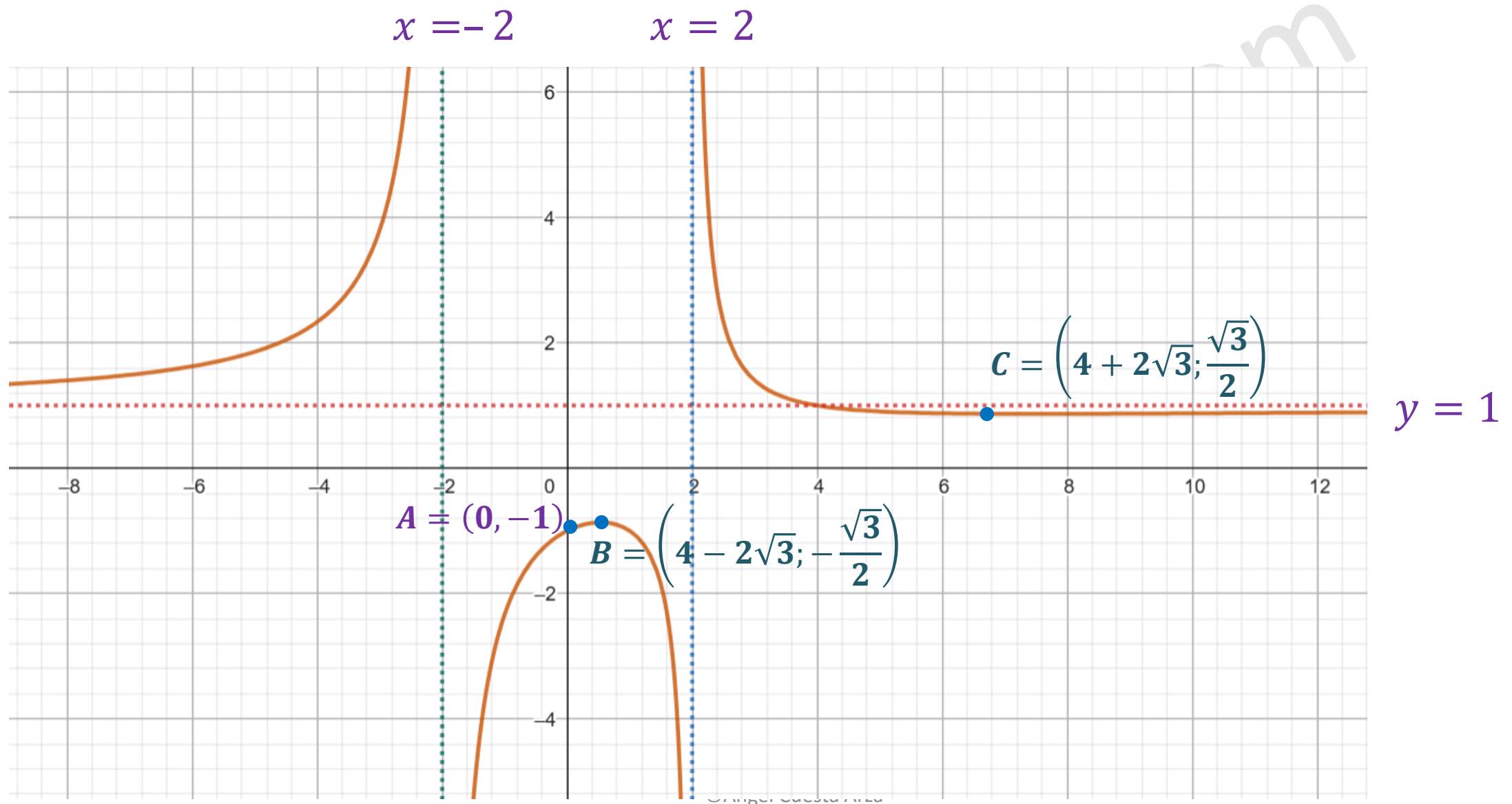
$$B = \left(4 - 2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) + 4}{(4 + 2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

Mínimo relativo:

$$C = \left(4 + 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



BONUS

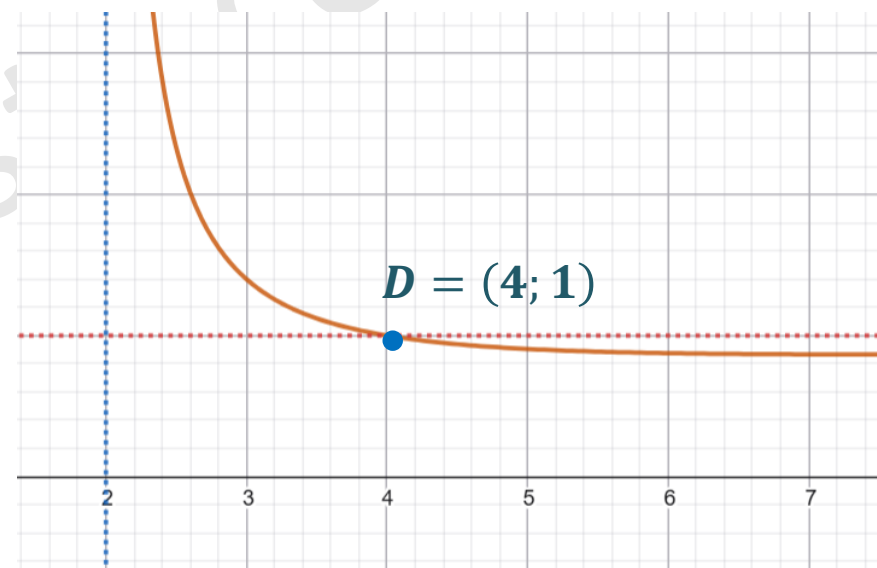
En esta gráfica se observa un hecho que inquieta a muchos estudiantes. La curva corta a la asíntota horizontal. Hay que decir que el único tipo de asíntota que la función no puede cortar es la vertical. Las asíntotas horizontales y oblicuas sí pueden ser cortadas por la curva. De hecho, voy a calcular el punto de corte con fines pedagógicos.

Se iguala la función a la asíntota horizontal.

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 4 = x^2 - 4 \rightarrow -2x = -8 \rightarrow x = 4$$

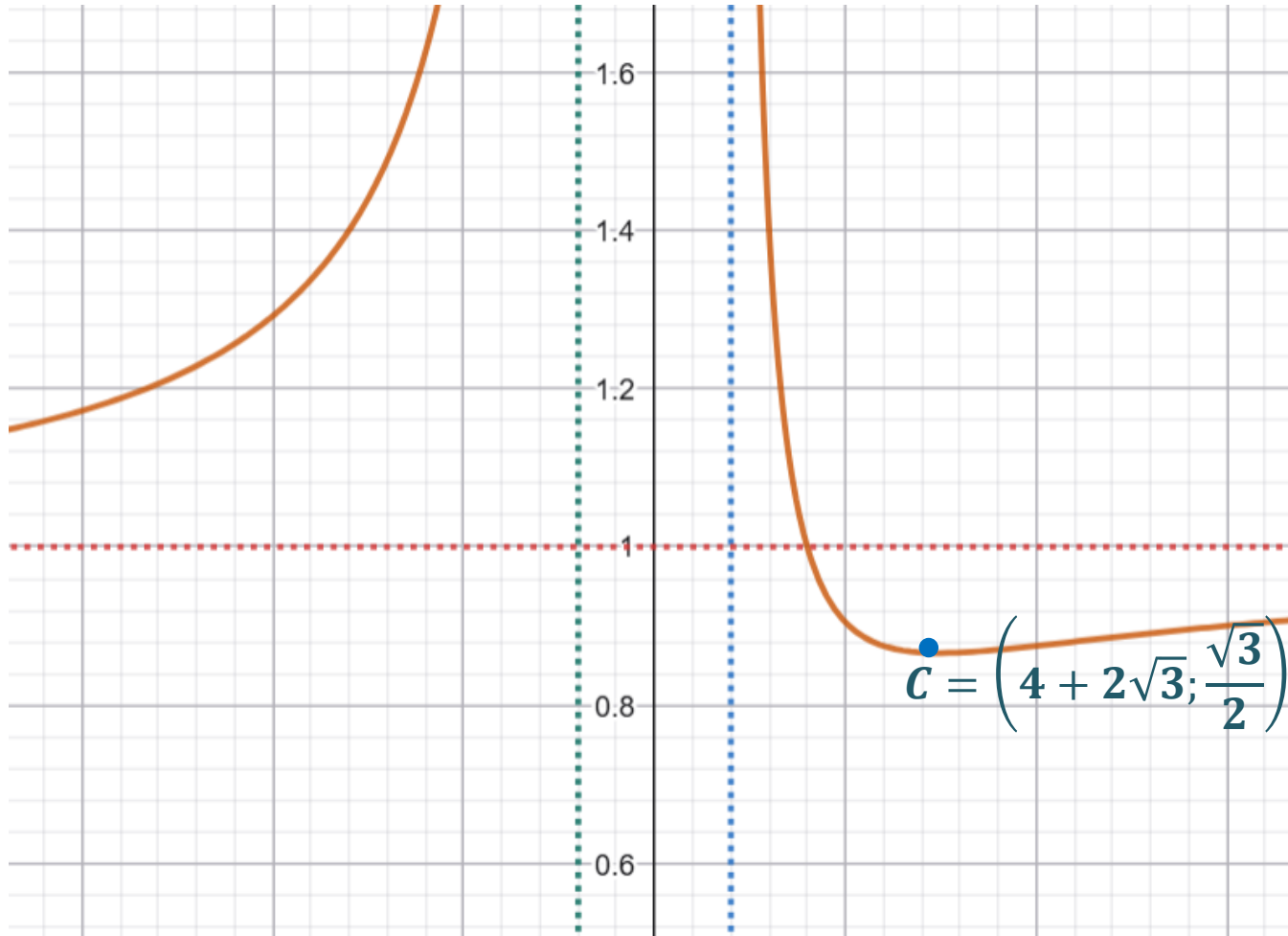
El punto de corte entre la curva y la asíntota horizontal es **D = (4, 1)**

Se muestra la región de la gráfica correspondiente.



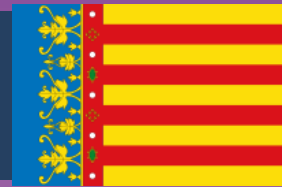
BONUS

Esta gráfica presenta un problema a la hora de su representación gráfica. El mínimo relativo es apenas perceptible ya que su valor es muy parecido al de la asíntota horizontal. Se hace un zoom en la gráfica para que se vea mejor.





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3
JUNIO-RESERVA 2026

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JUNIO–RESERVA 2026

Probabilidad

Problema 3. Una consultoría realiza una prueba de calidad a nuevas empresas para detectar si tienen una gestión adecuada. Tras años de estudios, se ha llegado a la conclusión de que el 70% de las empresas estudiadas están bien gestionadas y de que, en este caso, la prueba indica que está bien gestionada en el 90% de los casos. Se sabe que la probabilidad de que la prueba detecte como bien gestionada una empresa que está mal gestionada es del 5%.

- a) Calcula la probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada. *(1 punto)*
- b) Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada? *(1 punto)*
- c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea incorrecto. *(1 punto)*

Primero asignamos una letra a cada suceso.

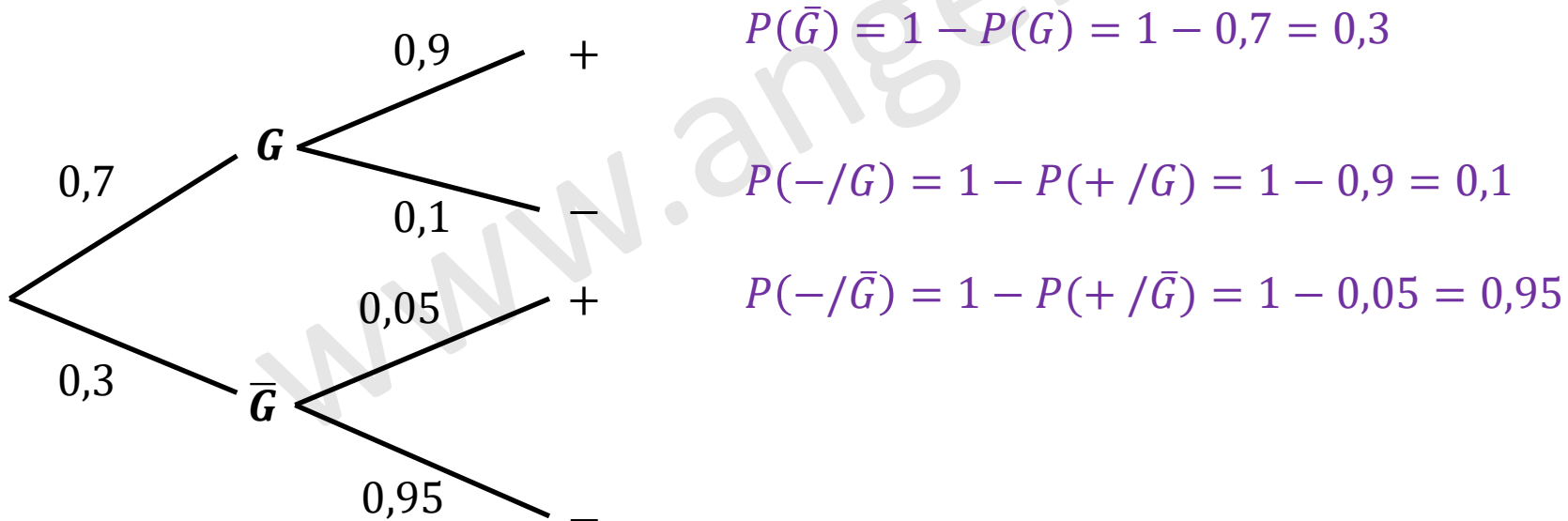
Tomamos datos del enunciado.

“... el 70% de las empresas estudiadas están bien gestionadas” $\rightarrow P(G) = 0,7$

“en este caso, la prueba indica que está bien gestionada en el 90% de los casos.” $\rightarrow P(+ / G) = 0,9$

“...la probabilidad de que la prueba detecte como bien gestionada una empresa que está mal gestionada es del 5%” $\rightarrow P(+ / \bar{G}) = 0,05$

A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.



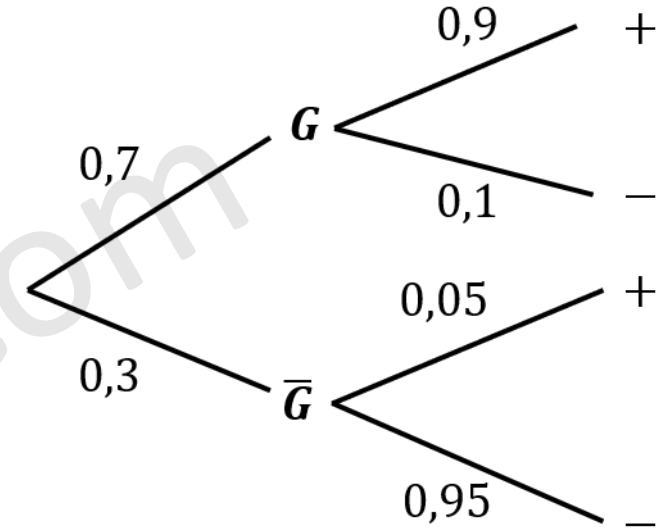
Problema 3

- a) Calcula la probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada. (1 punto)

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(\bar{G} \cap -) = P(\bar{G}) \cdot P(-/\bar{G}) = 0,3 \cdot 0,95 = \mathbf{0,285}$$

La probabilidad de que una empresa esté mal gestionada y la prueba haya indicado que está mal gestionada es **0,285 (28,5 %)**



- b) Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada? (1 punto)

Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(G/+) = \frac{P(G \cap +)}{P(+)} = \frac{P(G) \cdot P(+/G)}{P(G) \cdot P(+/G) + P(\bar{G}) \cdot P(+/\bar{G})} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,05} \approx \mathbf{0,9767}$$

Si la prueba ha indicado que una empresa está bien gestionada, la probabilidad de que la empresa esté bien gestionada es **0,9767 (97,67 %)**.

Problema 3

c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea incorrecto.

La prueba es incorrecta en dos casos incompatibles: falso negativo y falso positivo.

$$P(G \cap -) + P(\bar{G} \cap +) = P(G) \cdot P(-/G) + P(\bar{G}) \cdot P(+/\bar{G})$$

$$P(G \cap -) + P(\bar{G} \cap +) = 0,7 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,05 = \mathbf{0,085}$$

La probabilidad de que el resultado de la prueba sea incorrecto es **0,085 (8,5 %)**

