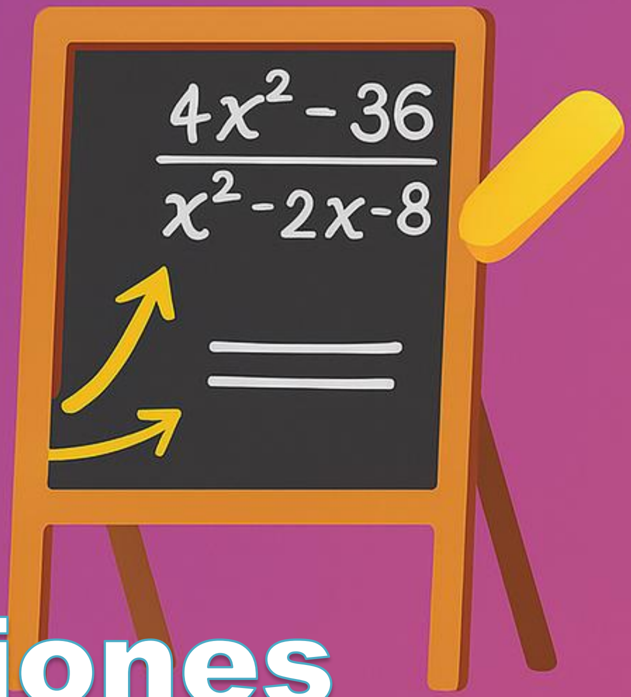
PAU COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS.

Problema 2 B
Junio 2025



Análisis de funciones

Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 - 2x - 8 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Por ello, el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-2, 4\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y\,(x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, \frac{9}{2}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B = (-3, 0)} \\ \boldsymbol{C = (3, 0)} \end{array}}$$

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **<u>es posible</u>** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{-20}{0} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \dfrac{-20}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \dfrac{-20}{0^-} = +\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = -2 \quad es\ A.V. de\ f(x)}}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Calculo el límite de la función en $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{28}{0} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \dfrac{28}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \dfrac{28}{0^+} = +\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = 4 \quad es\ A.V. de\ f(x)}}$$

Problema 2B

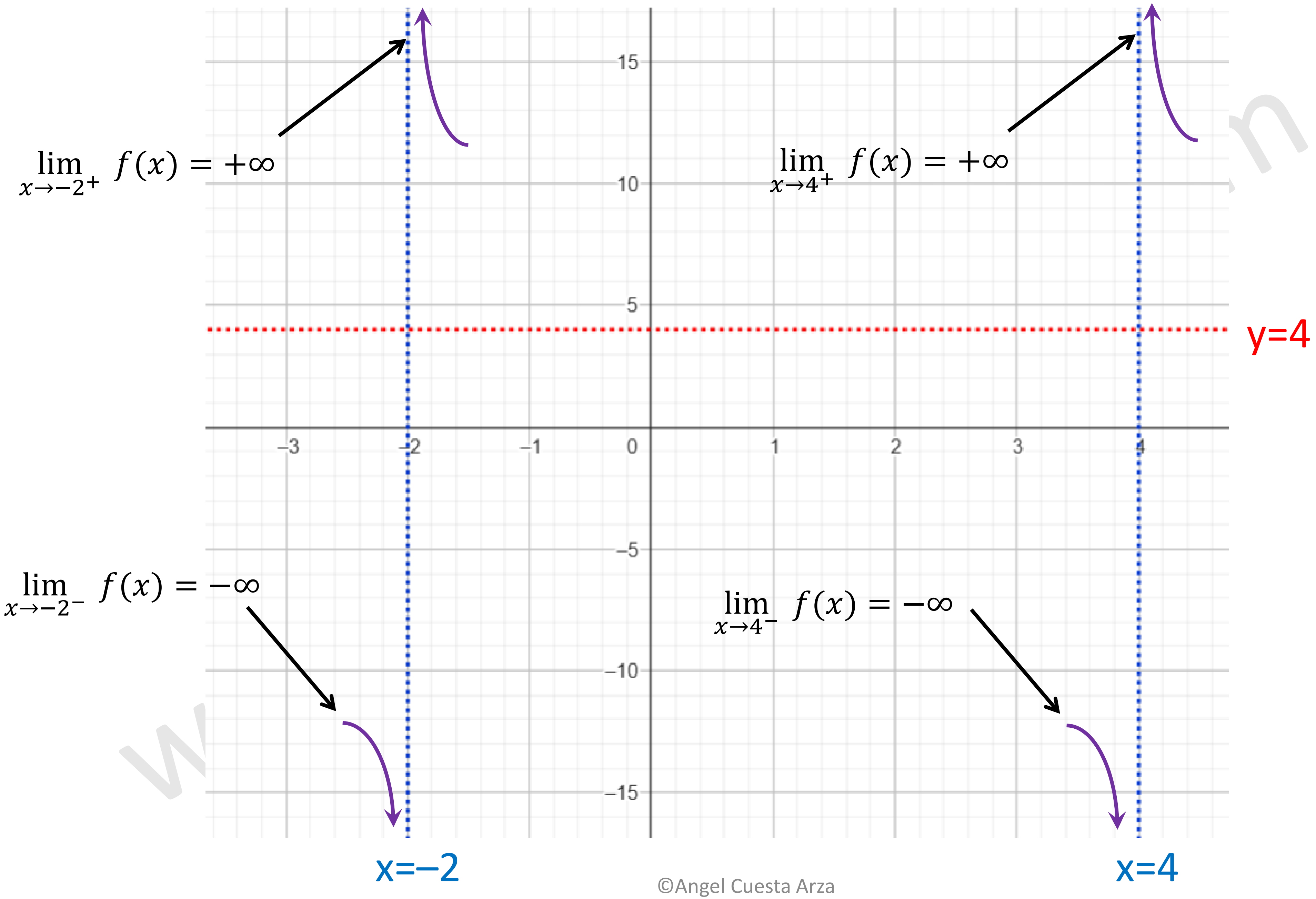
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$\boxed{por\ consiguiente, \boldsymbol{y = 4\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$


$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$
y=4
x=−2
x=4
15
10
5
0
−5
−10
−15
−3
−2
−1
1
2
3
4

Problema 2B

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{8x \cdot (x^2 - 2x - 8) - (4x^2 - 36) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{8x^3 - 16x^2 - 64x - 8x^3 + 8x^2 + 72x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\dfrac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \longrightarrow -8x^2 + 8x - 72 = 0 \longrightarrow -x^2 + x - 9 = 0 \longrightarrow \nexists x \in R$

Se estudia el signo de la derivada. Compruebo que $f'(x) < 0$ en todo su dominio, ya que $-x^2 + x - 9 < 0, \forall x \in R$

	$-\infty$ a -2	-2 a 4	4 a $+\infty$
f'(x)	−	−	−
f(x)	↘	↘	↘

$f(x)$ ***decrece*** en $x \epsilon (-\infty, -2) \cup (-2,4) \cup (4, +\infty)$

Problema 2B

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$

f’(x)	−	−	−
f(x)	↘	↘	↘

La función **no tiene ni máximos ni mínimos locales.**

Problema 2B

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.