

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 2

Junio 2019

Problema de optimización

El enunciado

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

- Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.
- ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?
- ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?
- Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Signo de una función

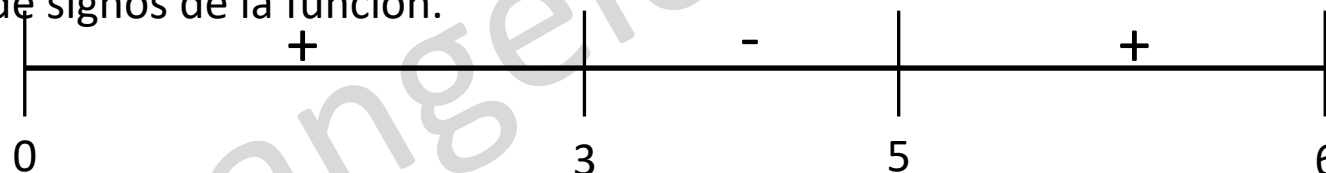
Dada la función: $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$; $0 \leq t \leq 6$ ¡OJO!, fíjate en el dominio

La empresa tendrá beneficios cuando $f(t) > 0$, y pérdidas cuando $f(t) < 0$.

Se iguala a cero la función para ver donde están los ceros.

$$t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \rightarrow t(t^2 - 8t + 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Con los valores obtenidos que pertenecen al dominio (que son todos), se hace un estudio de signos de la función.



Para ello se sustituyen un valor de cada intervalo en $f(t)$:

$$f(1) = 1^3 - 8 * 1^2 + 15 * 1 = 8 > 0$$

$$f(4) = 4^3 - 8 * 4^2 + 15 * 4 = -4 < 0$$

$$f(5.5) = 5.5^3 - 8 * 5.5^2 + 15 * 5.5 = 6.875 > 0$$

Teniendo en cuenta que la función $f(t)$ está definida en $[0,6]$, la empresa tuvo beneficios en los periodos $(0,3) \cup (5,6]$ y tuvo pérdidas en $(3,5)$.

Cálculo de máximos y mínimos

Para el estudio de la monotonía se necesita calcular la derivada. $f'(t) = 3t^2 - 16t + 15$

Se iguala a cero para hacer el estudio de signos. $3t^2 - 16t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{8+\sqrt{19}}{3} \cong 4'1196 \\ t_2 = \frac{8-\sqrt{19}}{3} \cong 1'2137 \end{cases}$

	0	$\frac{8 - \sqrt{19}}{3}$	$\frac{8 + \sqrt{19}}{3}$	6
$f'(t)$		+	-	+
$f(t)$		↗	↘	↗

Se debe calcular el valor de $f(t)$ en las dos raíces t_1 y t_2 y en los valores extremos del dominio $t=0$ y $t=6$.

$f\left(\frac{8 + \sqrt{19}}{3}\right) \cong -4'0607$ que sería el mínimo relativo de $f(t)$ y $f(0) = 0$ que no es mínimo absoluto.

$f\left(\frac{8 - \sqrt{19}}{3}\right) \cong 8'2088$ que sería el máximo relativo de $f(t)$ y $f(6) = 18$ que sería máximo absoluto.

Solución: El **máximo** beneficio se alcanza a los **6 años** y es de **180000 euros** y la **máxima pérdida** se produjo al cabo de **4'1196 años** y esta **pérdida** fue de **40607 euros**.

Evolución futura de los beneficios de la empresa

La función será creciente para $t > 6$ ya que $f'(6) > 0$.

Por otro lado, $f(6) > 0$, por lo que en el sexto año tendrá beneficios que aumentarán año tras año al ser la función beneficios creciente hasta el infinito y más allá.

Por ello, a partir del quinto año, la empresa siempre tendrá beneficios.