



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2025–extra DANA

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



Problema 2. A. Una empresa agrícola que se dedica al cultivo de frutas tropicales ha implementado un sistema de riego automatizado para optimizar el consumo de agua. La función que describe la necesidad de agua del cultivo (en $m^3/\text{día}$) tras x días de crecimiento, para x entre 0 y 30, es:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 30]$. (0,75 puntos)
- b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima. (2 puntos)
- c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. (0,75 puntos)

Problema 2A

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,30]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 8$ y $x = 20$. En el resto de los valores la función es continua por estar definida por funciones polinómicas.

$$f(8) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} x^3 - 4x^2 + 10 = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 9 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 8$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 8$.

Problema 2A

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,30]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 20$.

$$f(20) = 3 \cdot 20 + 9 = 69$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^-} 3x + 9 = 3 \cdot 20 + 9 = 69 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} 70 = 70 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 20} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 20$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 20$.

Problema 2A

b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se calcula la derivada del primer trozo. El segundo trozo es una recta de pendiente positiva y siempre es creciente. Y el tercer trozo es constante y ni crece ni decrece.

$$f_1'(x) = 3x^2 - 8x \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x \cdot (3x - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8/3 \end{cases}$$

$$f_2'(x) = 3 > 0 \forall x \in (8, 20) \rightarrow f(x) \text{ es creciente } \forall x \in (8, 20)$$

Se hace un estudio de signos de $f_1'(x)$, teniendo en cuenta que $x \in (0, 8)$.

	0	8/3	8
$f_1'(x)$	-	+	
$f(x)$			

En el primer tramo se observa que hay un mínimo relativo. Se calcula.

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 10 = \frac{14}{27} \approx 0,5185 \quad m = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{27}\right)$$

Problema 2A

b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se ha calculado el único extremo relativo de la función a trozos. Pero para obtener los máximos y mínimos absolutos, dado que la función no es continua, debemos evaluarla en $x = 0, x = 8, x = 20$ y $x = 30$

$$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 10 = 10$$

$$f(8) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266$$

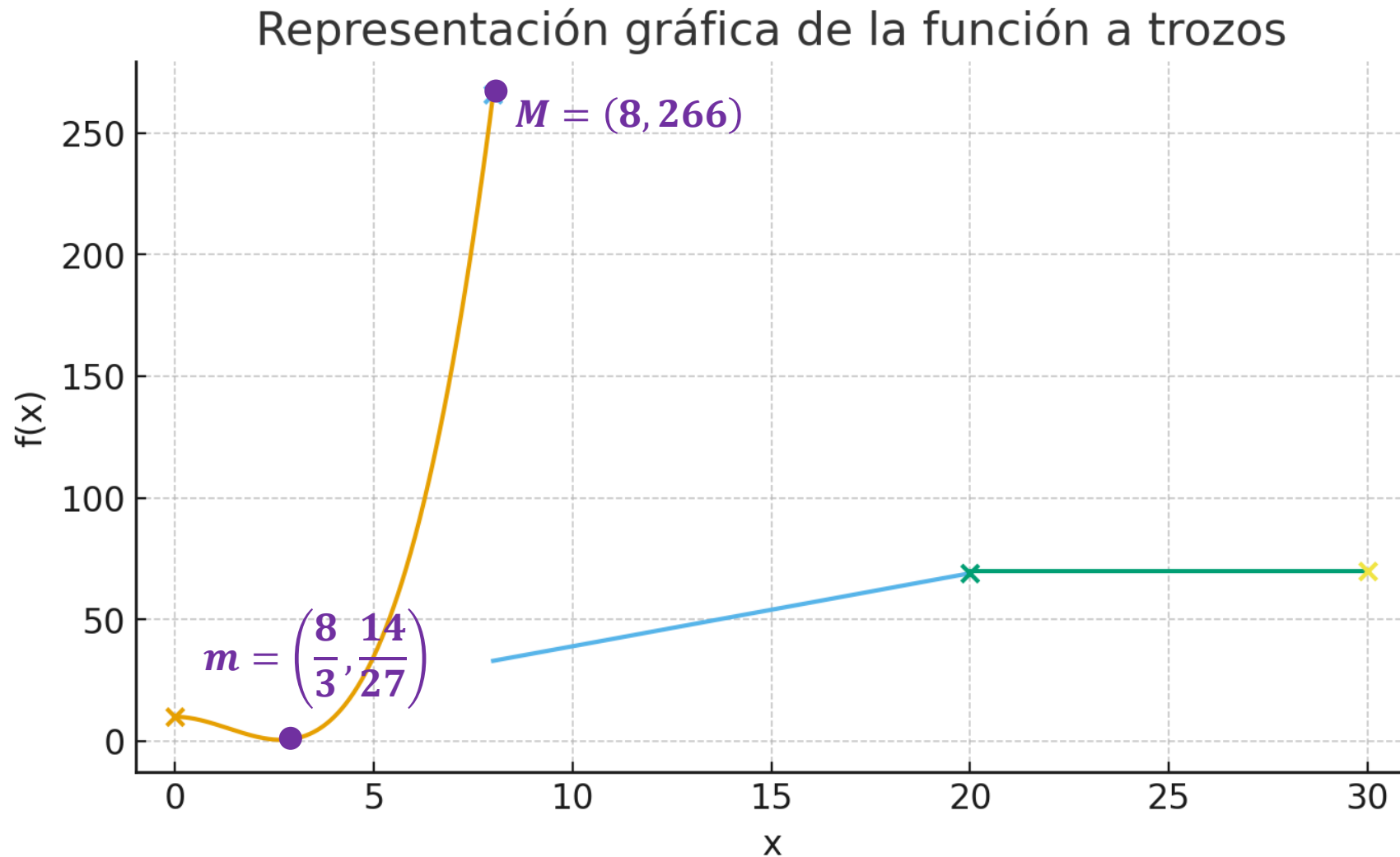
$$f(20) = 3 \cdot 20 + 9 = 69$$

$$f(30) = 70$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 10 = \frac{14}{27} \approx 0,5185$$

Como puede comprobarse, la máxima necesidad de agua se alcanza en el **día 8** y la mínima en el día **8/3**.

En esta gráfica puedes comprobar donde se encuentran el máximo y el mínimo absoluto.



Problema 2A

c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Anteriormente se ha comprobado que $f_1(x)$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área ya que el mínimo absoluto se encuentra por encima del eje X . Por ello, para calcular el área basta con obtener el valor de la integral definida de $f_1(x)$ entre 3 y 7.

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 (x^3 - 4x^2 + 10) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 10 \cdot x \right]_3^7 = \left(\frac{7^4}{4} - 4 \cdot \frac{7^3}{3} + 10 \cdot 7 \right) - \left(\frac{3^4}{4} - 4 \cdot \frac{3^3}{3} + 10 \cdot 3 \right)$$

$$\int_3^7 f(x) dx = \frac{2555}{12} - \frac{57}{4} = \frac{596}{3}$$

El área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. es **596/3 u.a.**

NOTA: La integral calculada representa **el volumen total de agua requerido por el cultivo entre el día 3 y el día 7.**

En esta gráfica puedes comprobar cual es el área bajo la curva que hemos calculado.

