Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2021

Problema 4

Optimización de una función cuadrática

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

El enunciado

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$Ingresos\colon\ I(x) = 4x^2 + 800x \qquad\qquad Gastos\colon G(x) = 6x^2 + 460x + 672$$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Solución:

Debemos tener en cuenta que el beneficio se obtiene restándole a los ingresos, los gastos.

$$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - (6x^2 + 460x + 672\ ) = -2x^2 + 340x - 672; \quad x > 0$$

El producto es rentable si el beneficio es positivo: $-2x^2 + 340x - 672 > 0$

Resolución

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

Para resolver la inecuación de segundo grado, se debe resolver en primer lugar la ecuación y después hacer un estudio de signos del polinomio que define dicha inecuación.

$$-2x^2 + 340x - 672 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 168 \end{cases}$$

x	0		2		168		$+\infty$
B(x)		$-$		$+$		$-$	

BENEFICIOS

Para que la empresa sea rentable, debe fabricar **más de 2 productos y menos de 168.**

Resolución

$B(x) = -2x^2 + 340x - 672$

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$B(x) = -2x^2 + 340x - 672$ Siendo: a=−2; b=340; c=−672

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-340}{2 \cdot (-2)} = 85$$

Deben fabricar 85 unidades para alcanzar el máximo beneficio.

Para calcular el beneficio máximo, se sustituye en la función x=85.

$$B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$$

El beneficio será de 13778 euros.

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas.

$$B'(x) = -4x + 340 \longrightarrow -4x + 340 = 0 \longrightarrow x = 85$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en x=85

$$B''(x) = -4 \longrightarrow B''(85) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en x=85 hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente.

Resolución

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Puesto que la función cuadrática decrece a partir del máximo (que está en x=85), el máximo beneficio se obtendrá cuando se fabriquen 100 unidades exactamente, ya que a medida que el número de unidades aumenta, el beneficio disminuye.

El beneficio se obtiene sustituyendo x=100 en la función.

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672$$

$$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$$

El beneficio obtenido al fabricar 100 unidades será de 13328 euros.