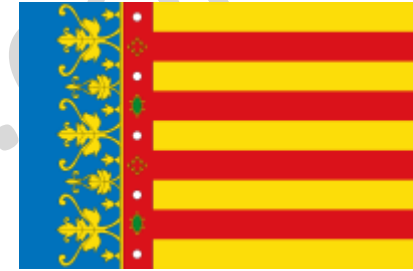


Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 4

Matrices y determinantes

El enunciado/Matriz inversa

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Halla la matriz inversa de A.
- Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz tiene inversa

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: $(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
--

Demostración

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de A.
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Calculo el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{La matriz no tiene inversa}$$

Al ser nulo el determinante de B, podemos decir que la matriz no tiene inversa.

Calculo el determinante de la matriz AB, para ello aplico la propiedad del determinante de un producto de matrices.

$$|AB| = |A| \cdot |B| = (-1) \cdot 0 = 0 \rightarrow \text{La matriz AB no tiene inversa}$$

Ecuación matricial

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Halla la matriz inversa de A.
- Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Se despeja X de forma algebraica: $AB - AX = BA \longrightarrow AB - BA = AX \longrightarrow A^{-1}(AB - BA) = A^{-1}(AX)$

$$\boxed{B - A^{-1}BA = X}$$

Se calcula $A^{-1}BA$: $A^{-1}BA = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & -2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula $X = B - A^{-1}BA$:

$$X = B - A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$