El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 2

Julio 2019

Análisis de Funciones

El enunciado

Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & si\ x \leq 1 \\ \frac{ax^2}{x^2+1} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula: $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

Estudio de la continuidad

Se observa que la función es continua en R.

Se estudia la continuidad en x=1 (Punto crítico).

Para que f(x) sea continua en x=1 debe cumplirse que:

$$\mathbf{f(1)} = \boldsymbol{\lim_{x \to 1} f(x)}$$

Calculo:

f(1)=2

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \quad x^2 - 3x + 3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{ax^2}{x^2+1} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Igualando los límites laterales: $\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Por ello, para a=2 f(1)=$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Lo que implica que la función es continua para **a=2**.

Estudio de la monotonía

Como f(x) tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.

Si x≤1→$f_1(x) = x^2 - 3x + 3 \rightarrow f_1'(x) = 2x - 3 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

La solución de la ecuación no pertenece al dominio, por lo que no la podemos tener en cuenta para el estudio de signos de la derivada.

Si x>1→$f_2(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \rightarrow f_2'(x) = \frac{4x*(x^2+1)-2x^2*2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

Igualando a cero la derivada: $\frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

En este caso, tampoco pertenece la solución al dominio de la función.

Por lo tanto ambas ramas de la función son monótonas.

Para estudiar la monotonía se dan valores a las derivadas:

$f_1'(0) = 2 * 0 - 3 = -3 < 0 \rightarrow \boldsymbol{f(x)\ es\ decreciente\ si\ x} \in (-\infty, \boldsymbol{1})$

$$f_2'(2) = \frac{4 * 2}{(2^2+1)^2} = \frac{8}{25} > 0 \rightarrow \boldsymbol{f(x)\ es\ creciente\ si\ x} \in (\boldsymbol{1}, +\infty)$$

Asíntotas

Como f(x) tiene dos ramas estudiamos las asíntotas en cada una de ellas.
Por ser $f_1(x) = x^2 - 3x + 3$ un polinomio, **no presenta asíntotas**.

En cuanto a $f_2(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$, al no anularse su denominador para ningún valor de x que pertenezca a su dominio, **tampoco tiene asíntotas verticales**.

En cuanto a la posible asíntota horizontal, calcularé el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Por lo tanto, **y=2 es Asíntota horizontal de f(x).**

Cálculo de la integral

En el intervalo [– 2,1] , f(x)=$x^2 - 3x + 3$. Entonces, haremos la integral sólo en el primer tramo de la función.

$$\int_{-2}^{1} x^2 - 3x + 3\; dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{1}$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{1} x^2 - 3x + 3\; dx = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 * 1^2}{2} + 3 * 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{3 * (-2)^2}{2} + 3 * (-2)\right) = \frac{33}{2}$$

Por lo tanto la solución será:

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \mathbf{\frac{33}{2}} = \mathbf{16'5}$$