Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Septiembre 2020

www.angelcuesta.com

Problema 4
Matrices y discusión de sistemas

©Angel Cuesta Arza

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

www.angelcuesta.com

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Cálculo de la matriz inversa.
2) Álgebra matricial.
3) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).

Herramientas utilizadas:

1) Matrices.
2) Determinantes.

www.angelcuesta.com

ANGEL CUESTA
Tu profesor en la red
SUSCRÍBETE

©Angel Cuesta Arza

El Enunciado

Sea: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

b) Dos constantes a,b de modo que A^{-1}= A^2+aA+bI. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación A^3−3A^2+3A−I=0 siendo I la matriz identidad.

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Cálculo la matriz inversa

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t \longrightarrow (A)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Cálculo de a y b. Propiedades de las matrices.

b) Dos constantes a,b de modo que $A^{-1}= A^2+aA+bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3-3A^2+3A-I=0$ siendo I la matriz identidad.

Aprovechamos los datos del enunciado para resolver el ejercicio.

Utilizamos la matriz inversa porque hemos demostrado que existe.

$$A^3-3A^2+3A-I=0 \longrightarrow A^3=3A^2-3A+I \longrightarrow A^{-1}\cdot A^3=A^{-1}\cdot(3A^2-3A+I) \longrightarrow A^2=3A-3I+A^{-1}$$

Despejo A^{-1}:

$$A^{-1}=A^2-3A+3I$$

Comparo con la expresión: $A^{-1}= A^2+aA+bI \longrightarrow \boxed{a=-3;\ b=3}$

www.angelcuesta.com

Discusión y resolución de un sistema homogéneo

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

Se obtiene el sistema que define la ecuación del enunciado.

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ 2y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Se observa que el sistema es **homogéneo**.

www.angelcuesta.com

Discusión y resolución de un sistema homogéneo

$$\begin{cases}(1-\lambda)x+2y=0\\ (1-\lambda)y=0\\ 2y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$$

Para discutir el sistema de ecuaciones, utilizaré el teorema de Rouché-Frobenius

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^*=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0\end{pmatrix}$$

Como se puede observar, al ser la última columna de la matriz ampliada toda de ceros (por ser el sistema homogéneo), el rango de A y el rango de A* coincidirán.

Calculo del rango de A en función de λ utilizando su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3 \longrightarrow (1-\lambda)^3=0 \longrightarrow \lambda=1$$

Si $\lambda\neq 1$, Ran(A)=Ran(A*)=nº de incógnitas=3, por lo que el sistema será compatible determinado.

Si $\lambda=1$, Ran(A)=Ran(A*)=2; nº de incógnitas=3, por lo que el sistema será compatible indeterminado.

Por lo que para que el sistema tenga infinitas soluciones, $\boldsymbol{\lambda=1}$

©Angel Cuesta Arza

www.angelcuesta.com

Discusión y resolución de un sistema homogéneo

Para calcular las soluciones se sustituye, $\boldsymbol{\lambda = 1}$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ 2y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases} \quad , \alpha, \beta \in R}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza