Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Septiembre 2020

Problema 3

Análisis de funciones e integrales

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Dominio de una función.
2) Asíntotas de una función.
3) Estudio de la monotonía de una función.
4) Cálculo de la integral definida de una función.

Herramientas utilizadas:

1) Inecuaciones de segundo grado.
2) Límites.
3) Derivadas.
4) Integrales.

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$

Solución:

El dominio de una función con una raíz cuadrada en el denominador serán aquellos valores de x, tales que el valor de dentro de la raíz sea estrictamente mayor que cero.

$$x^2 - 1 > 0$$

Para resolver la inecuación de segundo grado, se debe hacer un estudio de signos. Para ello se resuelve primero la ecuación que define.

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

Y se hace el estudio de signos.

$(-3)^2-1 > 0$ $\quad 0^2 - 1 < 0$ $\quad 3^2 - 1 > 0$

$+ \quad | \quad - \quad | \quad +$

$-1 \qquad +1$

Por ello , el dominio de f(x) será: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cálculo de las asíntotas

Dada la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f.

Las asíntotas verticales pueden ser los valores de x que anulan al denominador, es decir: x=−1 y x=1. Debemos comprobarlo.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists$$

x=1 es asíntota vertical por la derecha.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists$$

x=−1 es asíntota vertical por la izquierda.

Las asíntota horizontal se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{|x|}=1$$

y=1 es asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=-1$$

y=−1 es asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

f(x) no presenta asíntota oblicua porque tiene asíntota horizontal.

Estudio de la monotonía

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

Para estudiar la monotonía calculamos f´(x) y estudiamos su signo.

Se aplica la regla del cociente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \longrightarrow f'(x) = \frac{\frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

Se puede comprobar que **f'(x) es siempre negativa** en el dominio de f(x).

Ello es debido a que el **numerador** es siempre negativo y el **denominador** es siempre positivo ya que $x^2-1>0$ en el dominio de f(x).

Por ello, f(x) es decreciente en todo su dominio.

Representación gráfica

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

Se representan en primer lugar las asíntotas, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado a).

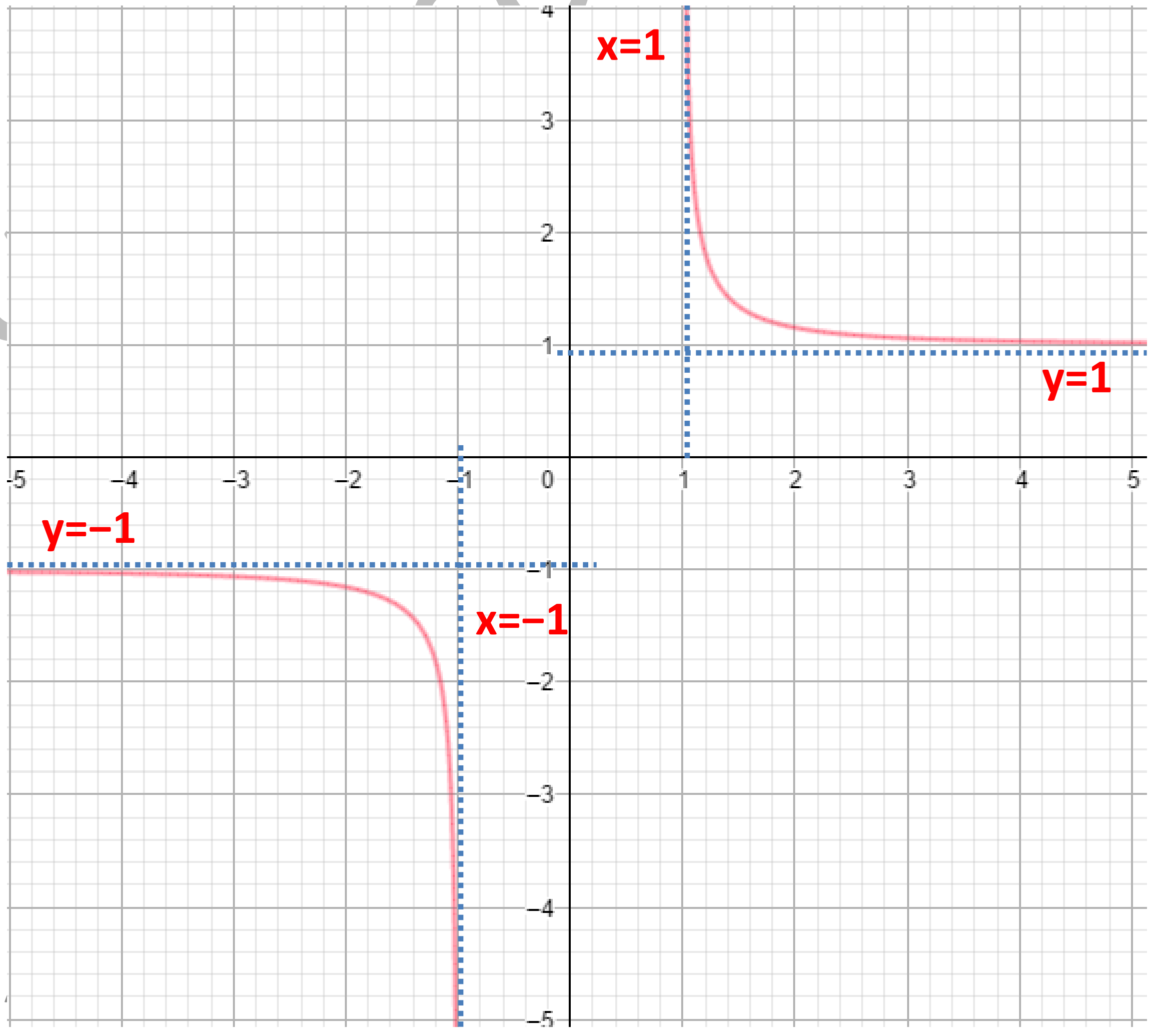
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

y=1 es asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito.

y=−1 es asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

También tenemos en cuenta que la función es decreciente en todo su dominio.



Calculo de la integral

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_2^3 \frac{\mathbf{2}\cdot x}{\mathbf{2}\cdot\sqrt{x^2-1}}dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{3^2-1} - \sqrt{2^2-1} = \sqrt{8}-\sqrt{3}$$

Debemos tener en cuenta la regla de integración: $\int \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + C$

Por lo tanto, el valor de la integral pedida es $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

Este valor representa el área comprendida entre f(x), el eje X y las rectas x=2 y x=3.