Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Septiembre 2020

Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).
2) Método de Gauss (Cálculo de rangos y resolución de S.C.I)

Herramientas utilizadas:

1) Matrices
2) Determinantes

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + \boldsymbol{a}y + 2z = 3 \\ x - 3y + \boldsymbol{a}z = -2 \\ x + y + 2z = \boldsymbol{a} \end{cases}$ Donde $\boldsymbol{a}$ es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de **a** para los cuales el sistema es compatible.

b) La solución del sistema cuando **a=0**.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{a}$ utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2; \; a^2 - 3a + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Si $a = 2$ o $a = 1$ entonces $|A| = 0$, $\mathbf{Ran}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3} \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de $\boldsymbol{a}$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} x + \boldsymbol{a}y + 2z = 3 \\ x - 3y + \boldsymbol{a}z = -2 \\ x + y + 2z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Si $a = 2$ $\longrightarrow$ $A^* = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & \mathbf{2} & 2 \\ 1 & -3 & \mathbf{2} \\ 1 & 1 & 2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3 \\ -2 \\ \mathbf{2}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \mathbf{2} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 5F_3 - F_2} \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3 \\ -5 \\ 0\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes, por lo que para $a = 2$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$ y **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{2}$

Si $a = 1$ $\longrightarrow$ $A^* = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & \mathbf{1} & 2 \\ 1 & -3 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3 \\ -2 \\ \mathbf{1}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \mathbf{1} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & -4 & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3 \\ -5 \\ \mathbf{1}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes, por ello para $a = 1$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$

En cambio, A* tiene tres filas linealmente independientes, por lo que para $a = 1$, **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Discusión y resolución del Sistema

$$\begin{cases} x + \boldsymbol{a}y + 2z = 3 \\ x - 3y + \boldsymbol{a}z = -2 \\ x + y + 2z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

En el cuadro remarco los valores de a para que el sistema sea compatible.

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq 2$ **y** $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = 2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $a = 1$	2	3	3	S.I.	Sin solución

b) Las soluciones del sistema cuando **a=0.**

Como se puede ver el Sistema es Compatible determinado. Resolveré el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \mathbf{0} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 3 \\ -3y - 2z = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$x + 2z = 3 \longrightarrow x + 2 \cdot 7 = 3 \longrightarrow x = -11$$

$$-3y - 2z = -5 \longrightarrow 9 - 2z = -5 \longrightarrow z = 7$$

La solución del sistema para $a = 0$ es: $\boxed{\begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{cases}}$

Resolución del Sistema

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + \boldsymbol{a}y + 2z = 3 \\ x - 3y + \boldsymbol{a}z = -2 \\ x + y + 2z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 2 & 3 \\ 1 & -3 & \boldsymbol{a} & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Como se puede ver el Sistema es Compatible Indeterminado para **a=2**. Como en el apartado anterior ya hemos utilizado el método de Gauss para obtener del Rango de A*, podemos utilizar esa misma matriz escalonada para resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -5y = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$z = \lambda \longrightarrow x = 1 - 2\lambda$$

Las soluciones del sistema para $a = 2$ son: $\boxed{\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 \qquad \lambda \epsilon R \\ z = \lambda \end{cases}}$