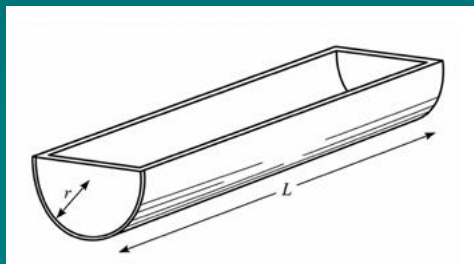




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

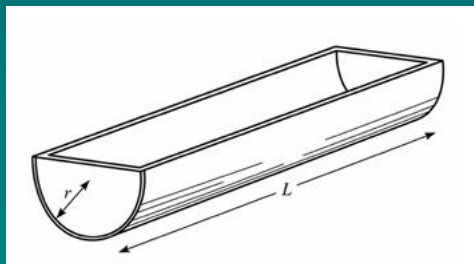
Optimización de funciones



JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.2



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones

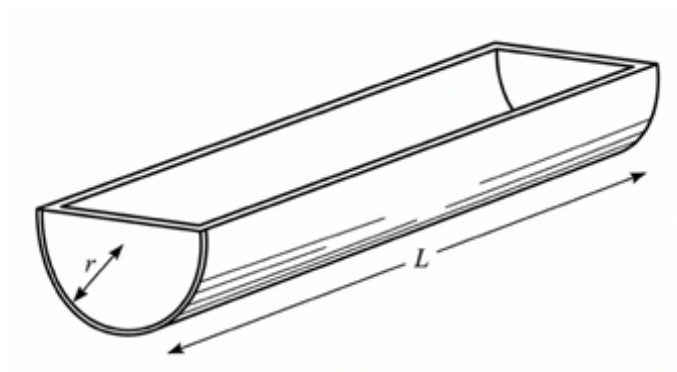
JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.2



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



- 4.2** Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

- 4.2.1 (1 punto)** Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .
- 4.2.2 (1.5 puntos)** Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

4.2.1 Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

Se definen las variables del problema r : radio del semicírculo en cm ;

L : Longitud del comedero en cm .

La expresión del área total del comedero en función de r y L es:

$$A = 2 \cdot A_{\text{semicírculo}} + A_{\text{Lateral}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L}{2} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot L$$

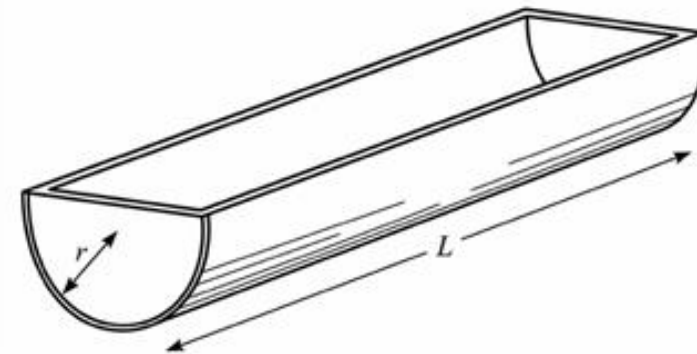
Se iguala la expresión del área total del comedero a su valor y se despeja L en función de r .

$$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot L = 600 \cdot \pi \rightarrow r^2 + r \cdot L = 600 \rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r}$$

El volumen del comedero en función de r y L es: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L}{2}$

Sustituyendo L en el volumen se obtiene la expresión pedida: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{600 - r^2}{r}\right)}{2}$

$$V = \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot (600 - r^2) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$$



La función que describe el volumen del comedero en función del radio r es: $V(r) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$

4.2.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Además de la expresión analítica de la función del volumen, necesito encontrar su dominio de definición.

$$\begin{cases} r > 0 \\ L > 0 \end{cases} \rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r} > 0 \xrightarrow{r > 0} 600 - r^2 > 0$$

Se iguala la expresión a cero y se hace un estudio de signos de la expresión cuadrática.

$$600 - r^2 = 0 \rightarrow r = \pm\sqrt{600} = \pm 10\sqrt{6} \xrightarrow{r > 0} r = 10\sqrt{6} \approx 24,4949 \text{ cm}$$

	0	$10\sqrt{6}$	$+\infty$
$600 - r^2$	+	-	

$$600 - r^2 \xrightarrow{r = 1} 600 - 1^2 = 599 > 0$$

$$600 - r^2 \xrightarrow{r = 25} 600 - 25^2 = -25 < 0$$

Siendo el dominio de $V(r)$: $r \in (0, 10\sqrt{6})$

4.2.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

$$V(r) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3 \quad \text{Se deriva la función, se iguala a cero y se hace un estudio de signos de } V(r) \text{ en su dominio de definición.}$$

$$V'(r) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 0 \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 300 \cdot \pi \xrightarrow{r > 0} r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,1421 \text{ cm}$$

	0	$10\sqrt{2}$	$10\sqrt{6}$
$V'(r)$		+	-
$V(r)$			

$$V'(1) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 > 0$$

$$V'(15) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 15^2 < 0$$

Nota: Para demostrar que es máximo también se puede usar el criterio de la segunda derivada.

Se calcula la longitud del comedero $L = \frac{600 - (10\sqrt{2})^2}{10\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} \text{ cm} = 20\sqrt{2} \text{ cm} \approx 28,2843 \text{ cm}$

Se calcula el volumen máximo: $V(10\sqrt{2}) = 300 \cdot \pi \cdot 10\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} \cdot (10\sqrt{2})^3 = 2000\sqrt{2} \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 8885,77 \text{ cm}^3$

El valor de r que maximiza el volumen es: $r = 10\sqrt{2} \text{ cm} \approx 14,1421 \text{ cm}$

El valor de L que maximiza el volumen es: $L = 20\sqrt{2} \text{ cm} \approx 28,2843 \text{ cm}$

El volumen máximo es: $2000\sqrt{2} \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 8885,77 \text{ cm}^3$