



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = |2x^2 - 3|$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = |2x^2 - 3|$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.1

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

Se expresa la función dada como función a trozos. Se recuerda la definición de la función valor absoluto de x .

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se obtienen los valores en los que se anula el argumento del valor absoluto.

$$2x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1,2247$$

Solo se utiliza la solución positiva ya que la negativa no pertenece al intervalo de estudio.

Se hace un estudio de signos del argumento del valor absoluto, $2x^2 - 3$, para poder definir la función a trozos.

	-1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$2x^2 - 3$	-	+	

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

A partir del estudio de signos del argumento del valor absoluto podemos deducir que:

$$f(x) = |2x^2 - 3| = \begin{cases} -2x^2 + 3, & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2x^2 - 3, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 5 \end{cases}$$

-1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$2x^2 - 3$	$-$	$+$

La función $f(x)$ está definida en todos los puntos de su intervalo de definición. Por ello, para analizar la monotonía de la función, se calcula la derivada y se iguala a cero cada trozo. Es fácil comprobar que la función no es derivable en el punto donde cambia la expresión del valor absoluto $x = \sqrt{6}/2$ (aunque no lo haré porque no se pide).

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{si } -1 < x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x < 5 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que la derivada se anula en $x = 0$ en el primer trozo. En el segundo trozo también se anula en $x = 0$, pero ese valor no pertenece al dominio restringido de dicho trozo.

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1,5]$.

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-0,5) > 0$ $f'(1) < 0$ $f'(3) > 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x < 5 \end{cases}$$

	-1	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $(-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right)$

$f(x)$ **decrece** en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

Como $f(x) = |2x^2 - 3|$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[-1, 5]$ (ya que es composición de funciones continuas: valor absoluto y un polinomio), el teorema de Weierstrass garantiza que $f(x)$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo, que estarán entre los puntos críticos y los extremos del intervalo.

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	-1	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

En $x = 0$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(0) = |2 \cdot 0^2 - 3| = 3$

Debemos obtener el valor de $f(x)$ en $x = 5$ para determinar si el máximo absoluto y el relativo coinciden o no. $f(5) = |2 \cdot 5^2 - 3| = 47$

En $x = \sqrt{6}/2$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left|2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3\right| = 0$

Debemos obtener el valor de $f(x)$ en $x = -1$ para determinar si el mínimo absoluto y el relativo coinciden o no. $f(-1) = |2 \cdot (-1)^2 - 3| = 1$

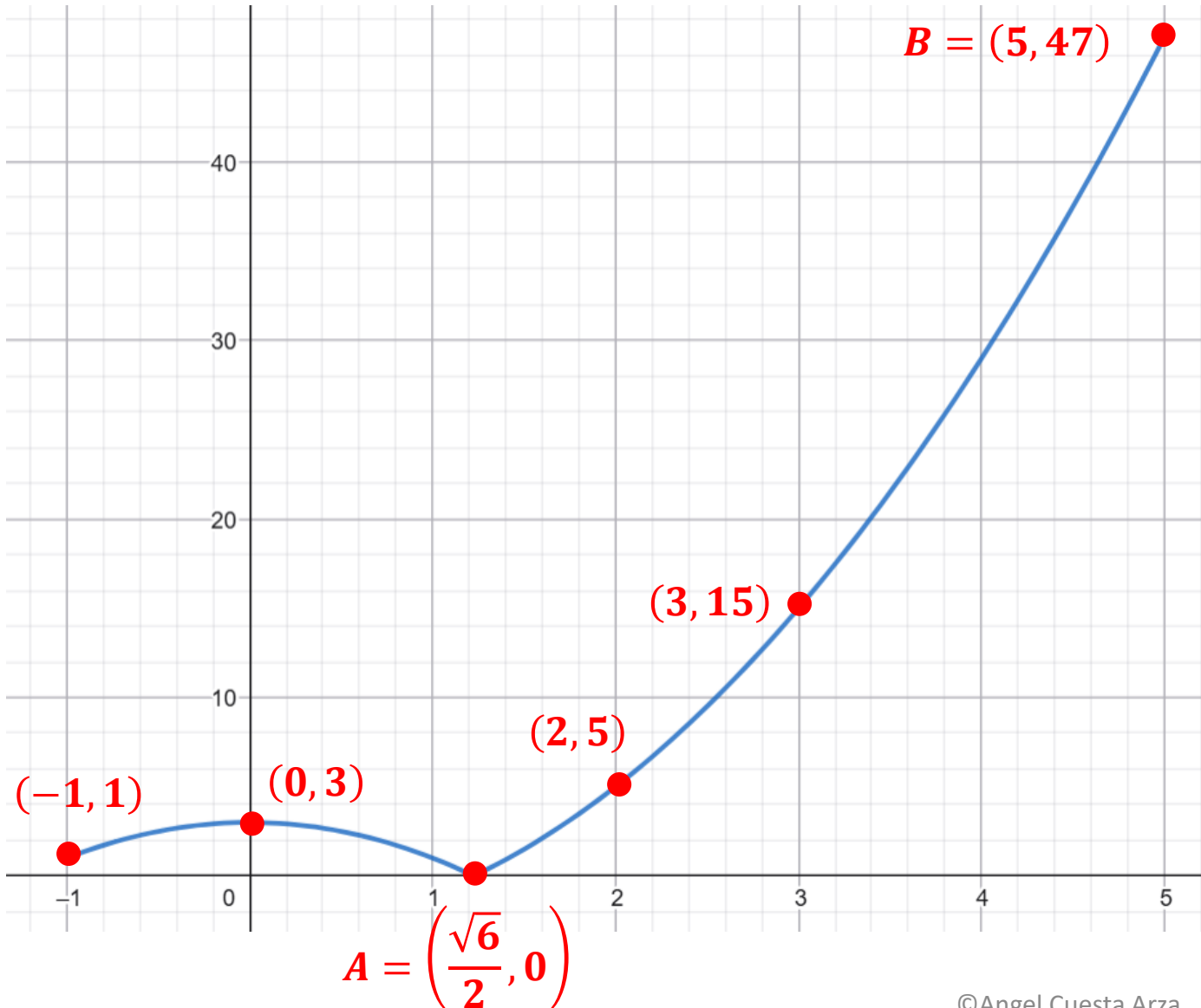
Mínimo absoluto en el punto $A = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

Máximo absoluto en el punto $B = (5, 47)$

©Angel Cuesta Arza

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .



Mínimo absoluto en el punto $A = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

Máximo absoluto en el punto $B = (5, 47)$

Valores obtenidos anteriormente:

$$f(-1) = 1 \quad f(0) = 3$$

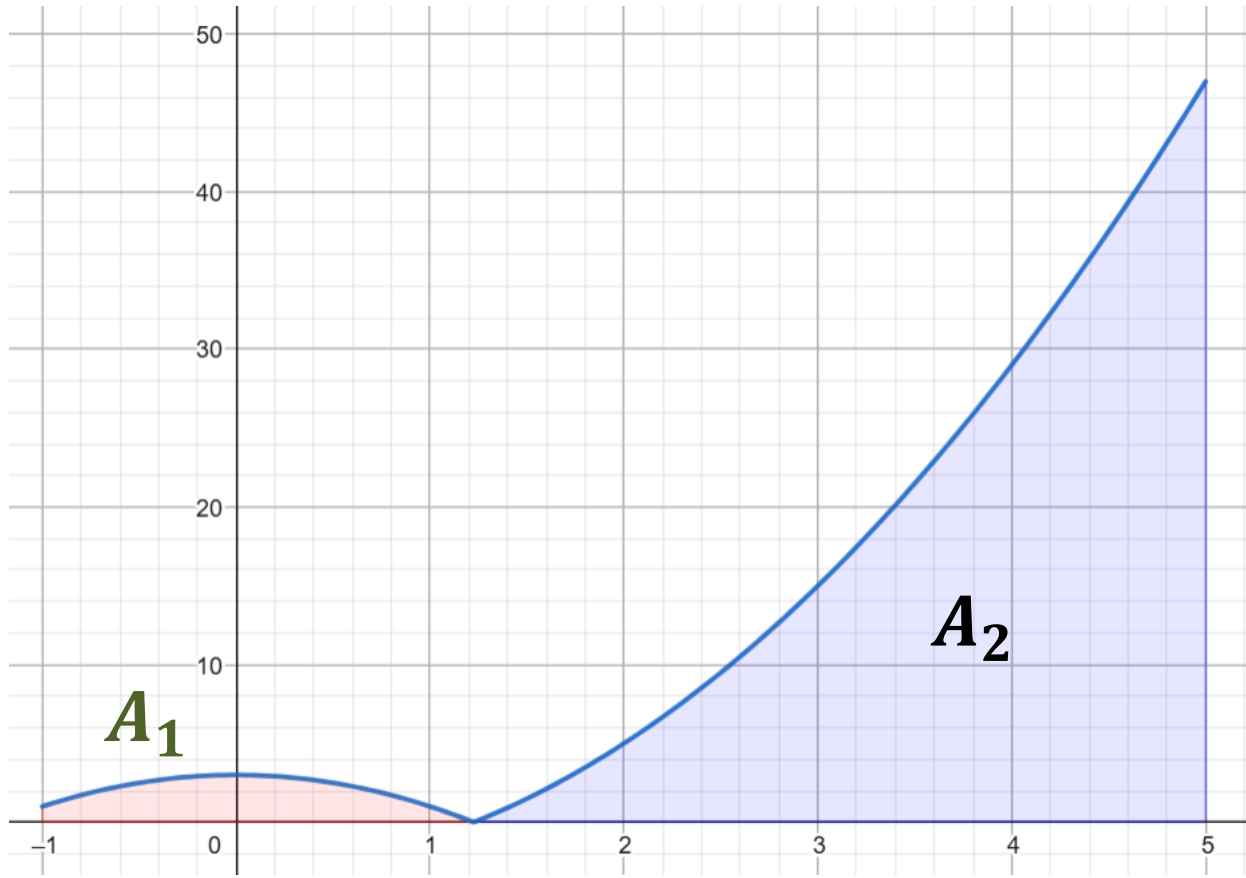
Se dan valores para afinar la representación.

$$f(2) = |2 \cdot 2^2 - 3| = 5$$

$$f(3) = |2 \cdot 3^2 - 3| = 15$$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.



Como se puede comprobar hay 2 regiones diferenciadas. Por lo que debo calcular el área de cada región por separado y luego sumarmas. Utilizaré cada una de las expresiones de la función a trozos.

Las integrales que hay que calcular son:

$$A_1 = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} (-2x^2 + 3) dx$$

$$A_2 = \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 (2x^2 - 3) dx$$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

$$A_1 = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} (-2x^2 + 3) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 3 \cdot (-1) \right)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot \frac{6}{4}}{3} + 3 \right) - \left(\frac{2}{3} - 3 \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2 + \frac{7}{3} = \sqrt{6} + \frac{7}{3} \text{ u.a.}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 (2x^2 - 3) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 = \frac{2 \cdot 5^3}{3} - 3 \cdot 5 - \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) = \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \frac{6}{4}}{3} - 3 \right)$$

$$A_2 = \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot (1 - 3) = \frac{205}{3} + \sqrt{6} \text{ u.a.}$$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

Calculo el área pedida:

$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{6} + \frac{7}{3} + \frac{205}{3} + \sqrt{6} = \frac{212}{3} + 2 \cdot \sqrt{6} \approx 75,5657 \text{ u. a.}$$

El área de la región es: $\frac{212}{3} + 2 \cdot \sqrt{6}$ *unidades de área*

