



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$$



JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.1



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.1

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar ambas rectas en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla.

Recta r

Dado que z está fijada, podemos despejar y en función de x y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y = a - 2x \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = a - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Recta s

Dado que la y sólo está en la primera ecuación, podemos despejar z en función de x en la segunda ecuación y sustituirla en la primera. De esta forma obtendremos la ecuación de la recta s en forma paramétrica. De ella obtenemos el punto y el vector director.

$$\begin{aligned} s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases} &\longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 + x - 2z \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 + x - 2 \cdot (a - x) \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 - 2a + 3x \\ z = a - x \end{cases} \\ &\longrightarrow s: \begin{cases} y = \frac{5 - 2a}{2} + \frac{3}{2}x \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{5 - 2a}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ z = a - \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \longrightarrow s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5 - 2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Resumiendo: Recta $r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

Se define la matriz de los vectores: $V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se calcula el rango de V a partir de un menor de orden 2: $|M| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Como $\text{Ran}(V) = 2$, los dos vectores son linealmente independientes y ello significa que las rectas pueden cruzarse o ser secantes. Para ningún valor de a pueden ser paralelas ni coincidentes.

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide: Recta $r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Se define la matriz A que contiene los vectores directores y el vector que une los puntos Q y R

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 - 0 & \frac{5-2a}{2} - a & a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{5-4a}{2} & a - 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula el rango de A en función de a . El determinante lo calculo desarrollando por la tercera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{5-4a}{2} & a-1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \left(\frac{5-4a}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (a-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 4a + 7 \cdot (a-1)$$

$$|A| = 3a - 2 \longrightarrow 3a - 2 = 0 \longrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide: $\text{Recta } r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq \frac{2}{3}, \text{Ran}(A) = 3. \\ \text{Si } a = \frac{2}{3}, \text{Ran}(A) = 2, \text{ya que } \text{Ran}(V) = 2 \text{ y } \text{Ran}(A) \geq \text{Ran}(V) \end{cases}$$

Si el rango de A es igual a 2, el vector que va desde una recta a otra es combinación lineal de los vectores directores y las rectas son **secantes**. Si el rango de A es igual a 3, los vectores directores y el vector que va desde una recta a otra son linealmente independientes y las rectas se **cruzan**.

Para $a \neq \frac{2}{3}$, r y s se cruzan.

Para $a = \frac{2}{3}$, r y s se cortan en un punto.

Problema 3.1

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

Anteriormente se ha demostrado que las rectas se cortan si: $a = \frac{2}{3}$

Para dicho valor a , las ecuaciones de r y s son: $r: \begin{cases} 2x + y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = \frac{2}{3} \end{cases}$

Puesto que $z = 1$, se puede despejar x de la segunda ecuación de s . $x + z = \frac{2}{3} \rightarrow x + 1 = \frac{2}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Despejo y de la primera ecuación de r . $2x + y = \frac{2}{3} \rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + y = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}$

Para $a = \frac{2}{3}$, el punto de corte entre r y s es $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$

Problema 3.1

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

Para calcular la distancia entre dos puntos se aplica la fórmula correspondiente. $O = (0,0,0)$ $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$

$$d_{OP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,6997$$

La distancia entre el origen de coordenadas y P es $\frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,6997$ unidades de longitud.