



**PAU - COMUNIDAD VALENCIANA**



# MATEMÁTICAS II

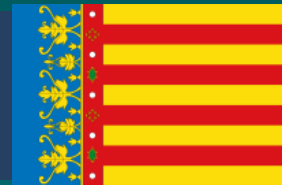
## ÁLGEBRA MATRICIAL

**JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.2**





**PAU - COMUNIDAD VALENCIANA**



# **MATEMÁTICAS II**

## **ÁLGEBRA MATRICIAL**

**JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.2**

# Problema 2.2

**2.2** Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es  $A$ , donde  $a$  es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix}$$

**2.2.1** El riesgo óptimo se obtiene cuando se verifica la ecuación  $A^2 - I = 2A$ , donde  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Determinar para qué valores de  $a$  se optimiza el riesgo.

**2.2.2** En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de  $a$  para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro  $a$ .

Se calcula en primer lugar la matriz  $A^2$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - a) \cdot (1 - a) + 1 \cdot 1 & (1 - a) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + a) \\ 1 \cdot (1 - a) + (1 + a) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (1 + a) \cdot (1 + a) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 - 2a + a^2 + 1 & 1 - a + 1 + a \\ 1 - a + 1 + a & 1 + 1 + 2a + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz  $A^2 - I$ .

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}$$

# Problema 2.2

**2.2.1** El riesgo óptimo se obtiene cuando se verifica la ecuación  $A^2 - I = 2A$ , donde  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
Determinar para qué valores de  $a$  se optimiza el riesgo.

Se recuerda que:  $A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}$  Dos matrices son iguales cuando lo son todos y cada uno de sus elementos  $a_{ij}$ . Se igualan ambas matrices y sus elementos  $a_{ij}$ .

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{pmatrix}$$

Se obtiene el valor del parámetro que satisface todas y cada una de las igualdades.

$$\begin{array}{lcl} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a & 2 = 2 & \\ 2 = 2 & a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a & \end{array} \rightarrow \begin{array}{lcl} a^2 = 1 & 2 = 2 & \\ 2 = 2 & a^2 = 1 & \end{array} \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Los valores que optimizan el riesgo son:  $a = -1$  y  $a = 1$ .

# Problema 2.2

**2.2.2** En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de  $a$  para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro  $a$ .

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos y en el proceso se obtendrá la condición que debe cumplir  $a$  para que la matriz tenga inversa.

$$1) \text{ Calculo } |A|; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a) \cdot (1+a) - 1 \cdot 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2$$

Para que exista la matriz inversa de  $A$ , su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$-a^2 \neq 0 \longrightarrow a \neq 0$$

Por lo tanto,  $\exists A^{-1} \forall a \in \mathfrak{R} - \{0\}$ .

**2.2.2** En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de  $a$  para los cuales se cumple esta última condición y **calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro  $a$ .**

Se calcula la matriz inversa de:  $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

1) Determinante:  $|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = -a^2 \neq 0 \rightarrow$  La matriz tiene inversa si  $a \neq 0$

2) Matriz de los adjuntos:  $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta:  $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{-a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a-1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$

Solución:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-a-1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}; a \neq 0$