



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

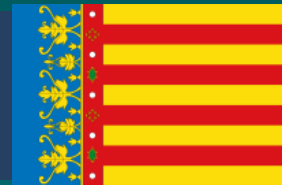
SISTEMAS DE ECUACIONES

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

SISTEMAS DE ECUACIONES

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.1

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$ se pide:

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada). $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de α mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$, entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3** $\xrightarrow[3 \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$ **Ran(A*) = 3**

Si $\alpha = -1$ o $\alpha = 2$ entonces $|A| = 0$, **Ran(A) < 3** $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $\alpha = -1$ o $\alpha = 2$ en las matrices A y A^* .

Problema 2.1

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Calcularé de forma simultánea el rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Si $\alpha = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_A$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_A$

F_2	1	-1	1	1
F_1	-1	1	-1	0
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	1

F_3	-1	1	-1	2
$-F_1$	1	-1	1	0
$F_3=F_3-F_1$	0	0	0	2

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene una fila linealmente independiente y que A^* tiene dos filas linealmente independientes. Para $\alpha = -1$, **$\text{Ran}(A) = 1$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 2.1

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Calcularé de forma simultánea el rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = 2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}]{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$2F_2$	2	4	2	2
$-F_1$	-2	-1	1	0
$F_2=2F_2-F_1$	0	3	3	2

F_3	0	3	3	4
$-F_2$	0	-3	-3	-2
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	2

$2F_3$	-2	2	4	4
$+F_1$	2	1	-1	0
$F_3=2F_3+F_1$	0	3	3	4

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $\alpha = 2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$.**

Problema 2.1

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de sistema	Número de soluciones
Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\alpha = -1$	1	2	3	S.I.	Sin solución
Si $\alpha = 2$	2	3	3	S.I.	Sin solución

2.1.2 Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro para $\alpha \notin \{-1, 2\}$. Resolveré el sistema en función de α . Se utilizará la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{1}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1) \cdot (2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{2\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}, \frac{\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}, \frac{2\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)} \right); \alpha \notin \{-1, 2\}$

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$