



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

**PROBABILIDAD
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

**PROBABILIDAD
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 1

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlaces para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 1

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

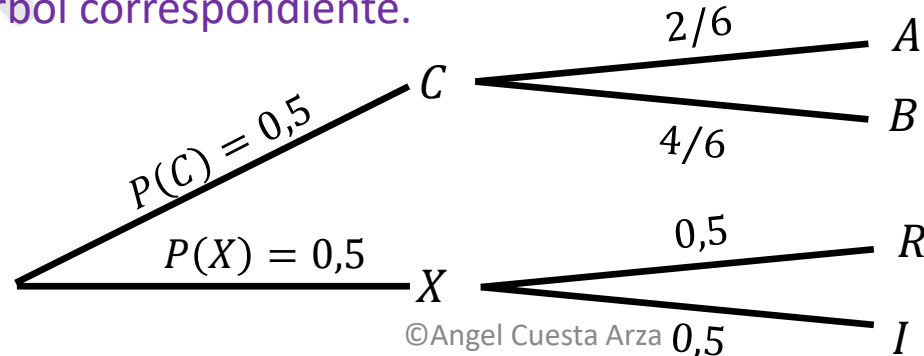
- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

1.1 Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.

Se definen los sucesos dados en el enunciado. $C = \{\text{Sale cara}\}$ $X = \{\text{Sale cruz}\}$ $R = \{\text{Sale par}\}$ $I = \{\text{Sale impar}\}$
 $A = \{\text{Mayor o igual que 5}\}$ $B = \{\text{Menor o igual que 4}\}$

Se representa el diagrama de árbol correspondiente.



PROBLEMA 1

1.1 Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.

Se define el suceso ganar. $G = \{\text{El alumno gana la ronda}\}$

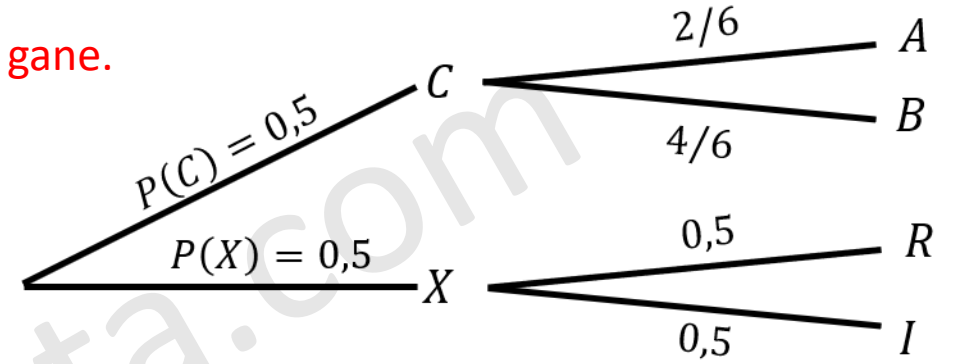
Siendo: $G = (C \cap A) \cup (X \cap R)$

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(C \cap A) + P(X \cap R) = P(C) \cdot P(A/C) + P(X) \cdot P(R/X)$$

$$P(G) = P(C \cap A) + P(X \cap R) = 0,5 \cdot \frac{2}{6} + 0,5 \cdot 0,5 = \frac{5}{12} \approx 0,4167$$

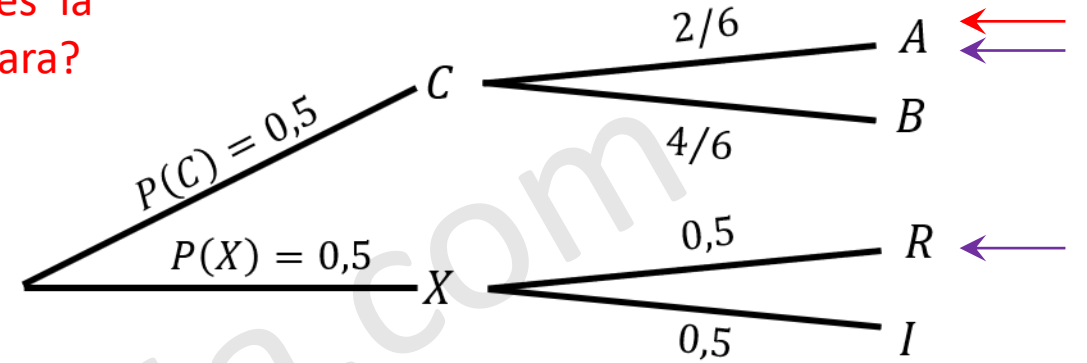
La probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane es $5/12 \approx 0,4167$ (41,67 %).



1.2 Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?

Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad a posteriori).

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C \cap A)}{P(G)}$$



En este caso, si ha salido cara y el alumno ha ganado, necesariamente el dado ha sacado un número mayor o igual que 5.

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap A)}{P(G)} = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(G)} = \frac{0,5 \cdot \frac{2}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara es **0,4 (40 %)**.

1.3 Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

Definimos la variable aleatoria Y : Y =número de veces que gana el alumno

Y es una variable aleatoria binomial donde: $n = 7$; $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $q = 1 - p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $Y \sim Bi\left(7; \frac{1}{3}\right)$

p = Probabilidad de sacar un 5 o un 6

Se calcula la probabilidad pedida $P(Y = 5)$

$$P(Y = 5) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{4}{9} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{4}{9} = \frac{42}{2} \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{4}{9} = \frac{28}{729} \approx 0,0384$$

La probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces es **$28/729 \approx 0,0384$ (3,84 %)**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

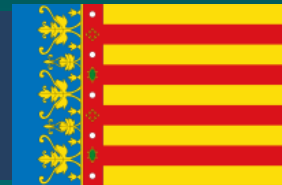
SISTEMAS DE ECUACIONES

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

SISTEMAS DE ECUACIONES

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.1

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$ se pide:

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada). $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de α mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$, entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow[3 \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $\alpha = -1$ o $\alpha = 2$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $\alpha = -1$ o $\alpha = 2$ en las matrices A y A^* .

Problema 2.1

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Calcularé de forma simultánea el rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Si $\alpha = -1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_A \qquad \qquad \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

F_2	1	-1	1	1
F_1	-1	1	-1	0
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	1

F_3	-1	1	-1	2
$-F_1$	1	-1	1	0
$F_3=F_3-F_1$	0	0	0	2

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene una fila linealmente independiente y que A^* tiene dos filas linealmente independientes. Para $\alpha = -1$, **$\text{Ran}(A) = 1$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 2.1

2.1.1 Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

Calcularé de forma simultánea el rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = 2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}]{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$2F_2$	2	4	2	2
$-F_1$	-2	-1	1	0
$F_2=2F_2-F_1$	0	3	3	2

F_3	0	3	3	4
$-F_2$	0	-3	-3	-2
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	2

$2F_3$	-2	2	4	4
$+F_1$	2	1	-1	0
$F_3=2F_3+F_1$	0	3	3	4

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $\alpha = 2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$.**

Problema 2.1

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de sistema	Número de soluciones
Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\alpha = -1$	1	2	3	S.I.	Sin solución
Si $\alpha = 2$	2	3	3	S.I.	Sin solución

2.1.2 Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro para $\alpha \notin \{-1, 2\}$. Resolveré el sistema en función de α . Se utilizará la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{1}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1) \cdot (2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 \cdot (\alpha - 2)} = \frac{2\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}$$

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}, \frac{\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)}, \frac{2\alpha - 3}{(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)} \right); \alpha \notin \{-1, 2\}$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

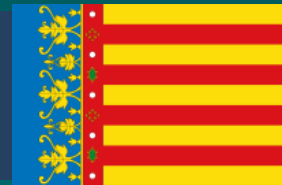
ÁLGEBRA MATRICIAL

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.2





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 2.2

Problema 2.2

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es A , donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix}$$

2.2.1 El riesgo óptimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar para qué valores de a se optimiza el riesgo.

2.2.2 En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

Se calcula en primer lugar la matriz A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - a) \cdot (1 - a) + 1 \cdot 1 & (1 - a) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + a) \\ 1 \cdot (1 - a) + (1 + a) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (1 + a) \cdot (1 + a) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 - 2a + a^2 + 1 & 1 - a + 1 + a \\ 1 - a + 1 + a & 1 + 1 + 2a + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz $A^2 - I$.

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2.2

2.2.1 El riesgo óptimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Determinar para qué valores de a se optimiza el riesgo.

Se recuerda que: $A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}$ Dos matrices son iguales cuando lo son todos y cada uno de sus elementos a_{ij} . Se igualan ambas matrices y sus elementos a_{ij} .

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 1 & 1 + a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{pmatrix}$$

Se obtiene el valor del parámetro que satisface todas y cada una de las igualdades.

$$\begin{array}{lcl} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a & 2 = 2 & \\ 2 = 2 & a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a & \end{array} \rightarrow \begin{array}{lcl} a^2 = 1 & 2 = 2 & \\ 2 = 2 & a^2 = 1 & \end{array} \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Los valores que optimizan el riesgo son: $a = -1$ y $a = 1$.

Problema 2.2

2.2.2 En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos y en el proceso se obtendrá la condición que debe cumplir a para que la matriz tenga inversa.

$$1) \text{ Calculo } |A|; \quad |A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a) \cdot (1+a) - 1 \cdot 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2$$

Para que exista la matriz inversa de A , su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$-a^2 \neq 0 \longrightarrow a \neq 0$$

Por lo tanto, $\exists A^{-1} \forall a \in \mathfrak{R} - \{0\}$.

2.2.2 En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y **calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .**

Se calcula la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = -a^2 \neq 0 \rightarrow$ La matriz tiene inversa si $a \neq 0$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{-a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a-1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-a-1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}; a \neq 0$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$$



JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.1



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.1

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar ambas rectas en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla.

Recta r

Dado que z está fijada, podemos despejar y en función de x y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y = a - 2x \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = a - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Recta s

Dado que la y sólo está en la primera ecuación, podemos despejar z en función de x en la segunda ecuación y sustituirla en la primera. De esta forma obtendremos la ecuación de la recta s en forma paramétrica. De ella obtenemos el punto y el vector director.

$$\begin{aligned} s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases} &\longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 + x - 2z \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 + x - 2 \cdot (a - x) \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} 2y = 5 - 2a + 3x \\ z = a - x \end{cases} \\ &\longrightarrow s: \begin{cases} y = \frac{5 - 2a}{2} + \frac{3}{2}x \\ z = a - x \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{5 - 2a}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ z = a - \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \longrightarrow s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5 - 2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Resumiendo: Recta $r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

Se define la matriz de los vectores: $V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se calcula el rango de V a partir de un menor de orden 2: $|M| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Como $\text{Ran}(V) = 2$, los dos vectores son linealmente independientes y ello significa que las rectas pueden cruzarse o ser secantes. Para ningún valor de a pueden ser paralelas ni coincidentes.

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide: Recta $r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

Se define la matriz A que contiene los vectores directores y el vector que une los puntos Q y R

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 - 0 & \frac{5-2a}{2} - a & a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{5-4a}{2} & a - 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula el rango de A en función de a . El determinante lo calculo desarrollando por la tercera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{5-4a}{2} & a-1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \left(\frac{5-4a}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (a-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 4a + 7 \cdot (a-1)$$

$$|A| = 3a - 2 \longrightarrow 3a - 2 = 0 \longrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Problema 3.1

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide: $\text{Recta } r: \begin{cases} Q = (0, a, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 0) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} R = \left(0, \frac{5-2a}{2}, a\right) \\ \vec{v} = \left(1, \frac{3}{2}, -1\right) \equiv (2, 3, -2) \end{cases}$

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

$$\begin{cases} \text{Si } a \neq \frac{2}{3}, \text{Ran}(A) = 3. \\ \text{Si } a = \frac{2}{3}, \text{Ran}(A) = 2, \text{ya que } \text{Ran}(V) = 2 \text{ y } \text{Ran}(A) \geq \text{Ran}(V) \end{cases}$$

Si el rango de A es igual a 2, el vector que va desde una recta a otra es combinación lineal de los vectores directores y las rectas son **secantes**. Si el rango de A es igual a 3, los vectores directores y el vector que va desde una recta a otra son linealmente independientes y las rectas se **cruzan**.

Para $a \neq \frac{2}{3}$, r y s se cruzan.

Para $a = \frac{2}{3}$, r y s se cortan en un punto.

Problema 3.1

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

Anteriormente se ha demostrado que las rectas se cortan si: $a = \frac{2}{3}$

Para dicho valor a , las ecuaciones de r y s son: $r: \begin{cases} 2x + y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = \frac{2}{3} \end{cases}$

Puesto que $z = 1$, se puede despejar x de la segunda ecuación de s . $x + z = \frac{2}{3} \rightarrow x + 1 = \frac{2}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Despejo y de la primera ecuación de r . $2x + y = \frac{2}{3} \rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + y = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}$

Para $a = \frac{2}{3}$, el punto de corte entre r y s es $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$

Problema 3.1

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

Para calcular la distancia entre dos puntos se aplica la fórmula correspondiente. $O = (0,0,0)$ $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$

$$d_{OP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,6997$$

La distancia entre el origen de coordenadas y P es $\frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,6997$ unidades de longitud.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x + y - 3 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.2





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x + y - 3 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 3.2

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

Se hace un esquema de la situación.

El vector normal de π será un vector director del plano pedido.

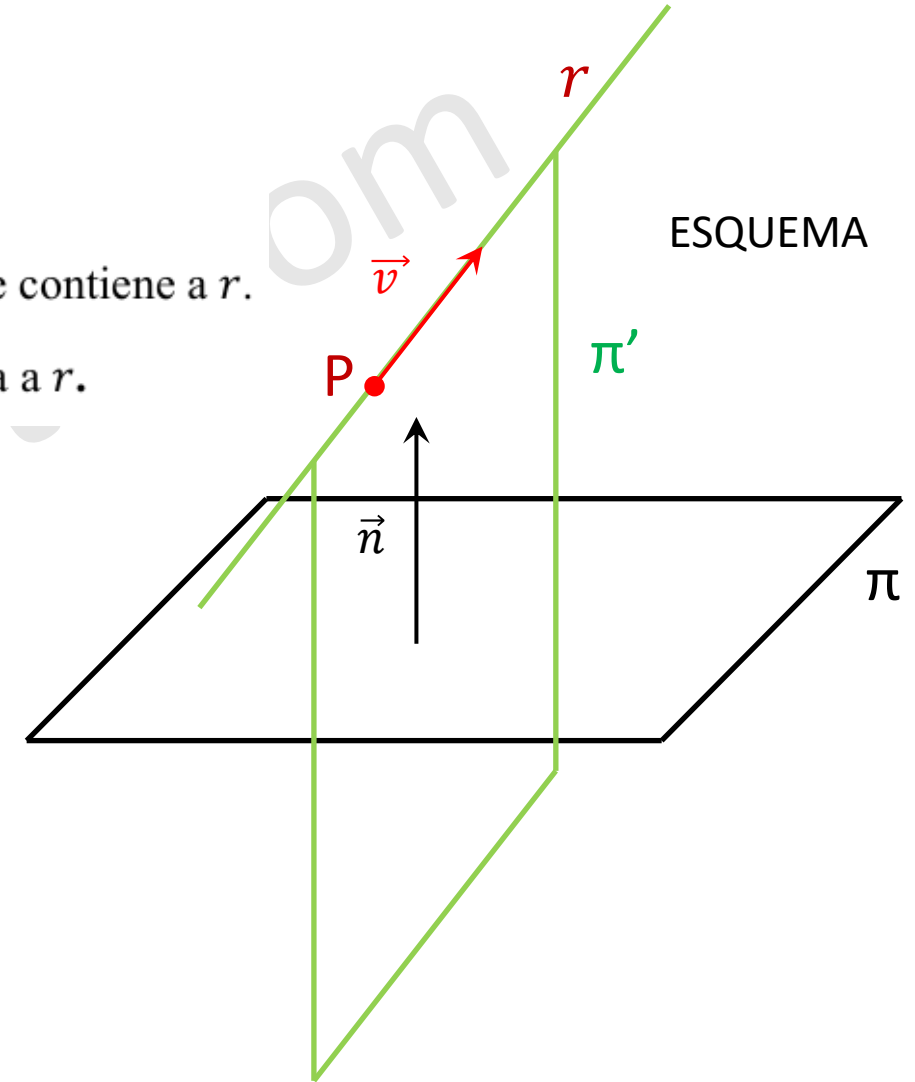
El plano pedido, π_1 , tendrá por vectores directores $\vec{n}$ y $\vec{v}$ y pasará por un punto $P \in r$.

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (2, 1, 0)$

El vector $\vec{v}$ es: $\vec{v} = (1, -2, 0)$

El punto P es: $P = (1, -1, 1)$

Ya tenemos todos los datos necesarios para calcular la ecuación de π_1 , lo hago en la siguiente diapositiva.



Ejercicio 3.2

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

Los datos son: $\vec{n} = (2,1,0)$ $\vec{v} = (1,-2,0)$ $P = (1,-1,1)$

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

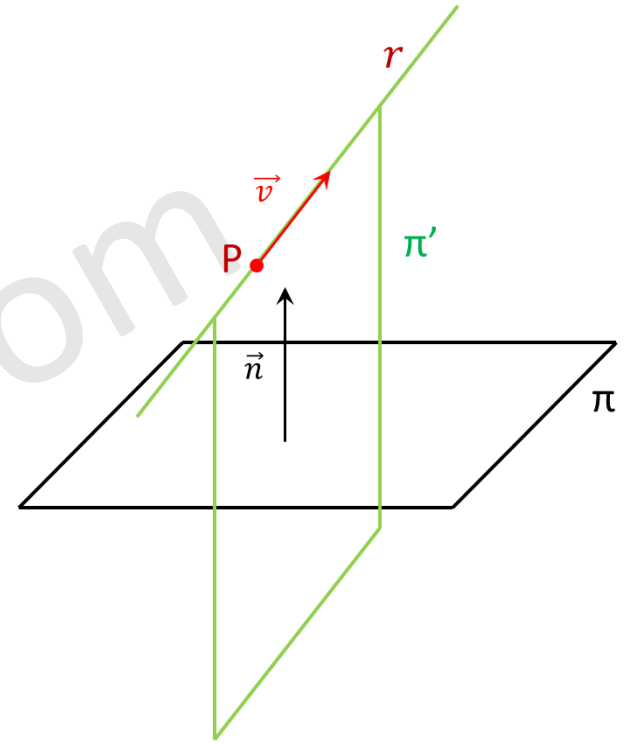
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot (z - 1) = -5z + 5 = 0$$

Puedo dividir a ambos lados de la igualdad por (-5) para simplificar la expresión de la ecuación del plano pedida.

$$\pi_1: z - 1 = 0$$

La ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r es $\pi_1: z - 1 = 0$

Como se observa, el plano perpendicular a π que contiene la recta r es el plano horizontal $z = 1$.



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

La ecuación del plano paralelo a π sería: $\pi_2: 2x + y + C = 0$

Se toma un punto genérico de la recta r : $P_\alpha = (1 + \alpha, -1 - 2\alpha, 1)$

Se sustituye el punto en el plano. Para que esté contenida debe obtenerse una identidad válida para todo valor de α .

$$2 \cdot (1 + \alpha) + (-1 - 2\alpha) + C = 0 \longrightarrow 2 + 2\alpha - 1 - 2\alpha + C = 0 \longrightarrow C = -1$$

Para $C = -1$ todos los puntos de la recta r están contenidos en el plano π_2 paralelo a π .

La ecuación del plano paralelo a π que contiene a r es $\pi_2: 2x + y - 1 = 0$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

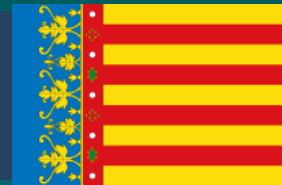
$$f(x) = |2x^2 - 3|$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = |2x^2 - 3|$$

JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.1

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

Se expresa la función dada como función a trozos. Se recuerda la definición de la función valor absoluto de x .

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se obtienen los valores en los que se anula el argumento del valor absoluto.

$$2x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1,2247$$

Solo se utiliza la solución positiva ya que la negativa no pertenece al intervalo de estudio.

Se hace un estudio de signos del argumento del valor absoluto, $2x^2 - 3$, para poder definir la función a trozos.

	-1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$2x^2 - 3$	-	+	

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

A partir del estudio de signos del argumento del valor absoluto podemos deducir que:

$$f(x) = |2x^2 - 3| = \begin{cases} -2x^2 + 3, & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2x^2 - 3, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 5 \end{cases}$$

-1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$2x^2 - 3$	$-$	$+$

La función $f(x)$ está definida en todos los puntos de su intervalo de definición. Por ello, para analizar la monotonía de la función, se calcula la derivada y se iguala a cero cada trozo. Es fácil comprobar que la función no es derivable en el punto donde cambia la expresión del valor absoluto $x = \sqrt{6}/2$ (aunque no lo haré porque no se pide).

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{si } -1 < x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x < 5 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que la derivada se anula en $x = 0$ en el primer trozo. En el segundo trozo también se anula en $x = 0$, pero ese valor no pertenece al dominio restringido de dicho trozo.

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1,5]$.

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-0,5) > 0$ $f'(1) < 0$ $f'(3) > 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x, & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x \leq 5 \end{cases}$$

	-1	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $(-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right)$

$f(x)$ **decrece** en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

Como $f(x) = |2x^2 - 3|$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[-1, 5]$ (ya que es composición de funciones continuas: valor absoluto y un polinomio), el teorema de Weierstrass garantiza que $f(x)$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo, que estarán entre los puntos críticos y los extremos del intervalo.

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	-1	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

En $x = 0$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(0) = |2 \cdot 0^2 - 3| = 3$

Debemos obtener el valor de $f(x)$ en $x = 5$ para determinar si el máximo absoluto y el relativo coinciden o no. $f(5) = |2 \cdot 5^2 - 3| = 47$

En $x = \sqrt{6}/2$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left|2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3\right| = 0$

Debemos obtener el valor de $f(x)$ en $x = -1$ para determinar si el mínimo absoluto y el relativo coinciden o no. $f(-1) = |2 \cdot (-1)^2 - 3| = 1$

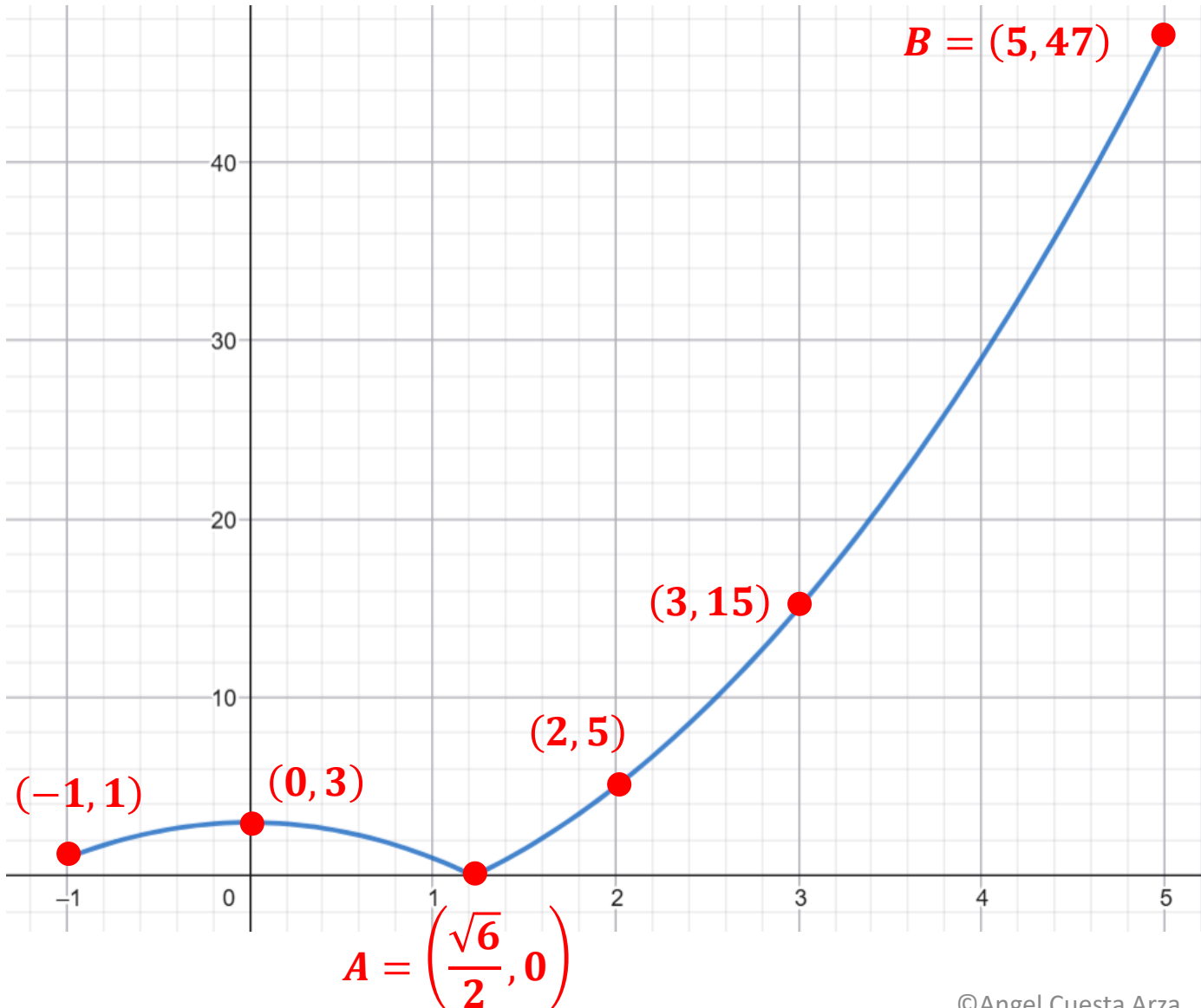
Mínimo absoluto en el punto $A = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

Máximo absoluto en el punto $B = (5, 47)$

©Angel Cuesta Arza

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .



Mínimo absoluto en el punto $A = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

Máximo absoluto en el punto $B = (5, 47)$

Valores obtenidos anteriormente:

$$f(-1) = 1 \quad f(0) = 3$$

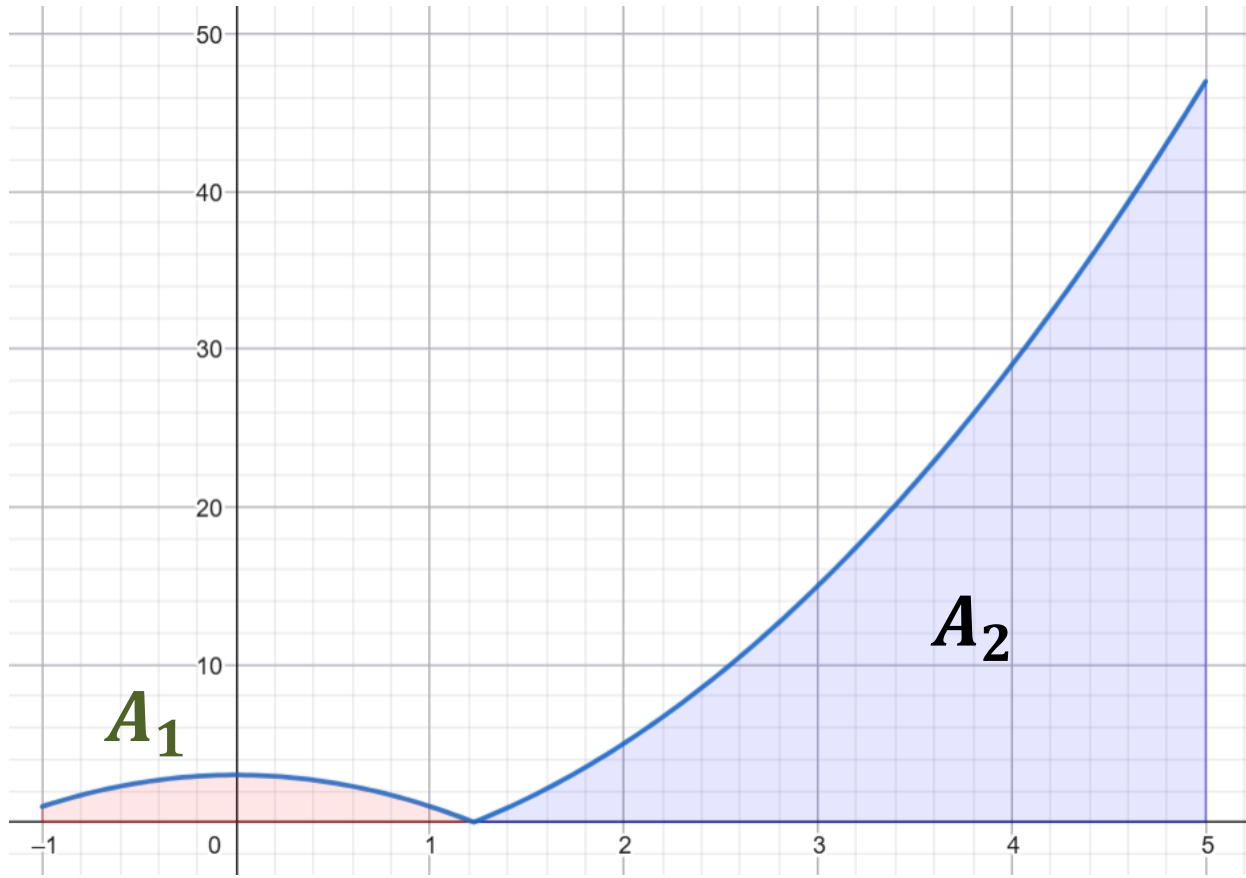
Se dan valores para afinar la representación.

$$f(2) = |2 \cdot 2^2 - 3| = 5$$

$$f(3) = |2 \cdot 3^2 - 3| = 15$$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.



Como se puede comprobar hay 2 regiones diferenciadas. Por lo que debo calcular el área de cada región por separado y luego sumarmas. Utilizaré cada una de las expresiones de la función a trozos.

Las integrales que hay que calcular son:

$$A_1 = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} (-2x^2 + 3) dx$$

$$A_2 = \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 (2x^2 - 3) dx$$

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

$$A_1 = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} (-2x^2 + 3) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 3 \cdot (-1) \right)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot \frac{6}{4}}{3} + 3 \right) - \left(\frac{2}{3} - 3 \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2 + \frac{7}{3} = \sqrt{6} + \frac{7}{3} \text{ u.a.}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 (2x^2 - 3) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 = \frac{2 \cdot 5^3}{3} - 3 \cdot 5 - \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) = \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \frac{6}{4}}{3} - 3 \right)$$

$$A_2 = \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot (1 - 3) = \frac{205}{3} + \sqrt{6} \text{ u.a.}$$

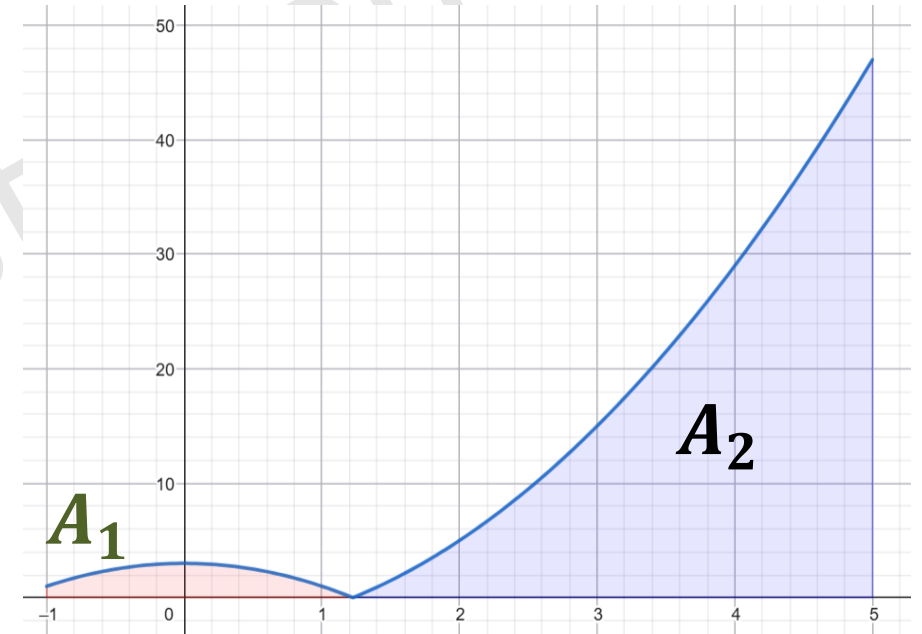
4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

Calculo el área pedida:

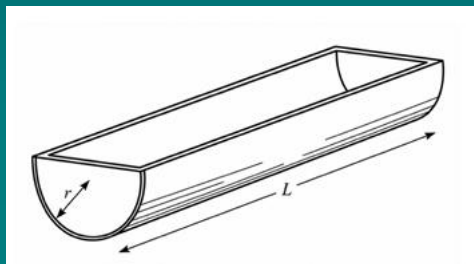
$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{6} + \frac{7}{3} + \frac{205}{3} + \sqrt{6} = \frac{212}{3} + 2 \cdot \sqrt{6} \approx 75,5657 \text{ u. a.}$$

El área de la región es: $\frac{212}{3} + 2 \cdot \sqrt{6}$ *unidades de área*





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

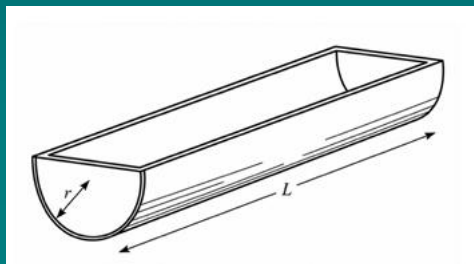
Optimización de funciones



JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.2



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones

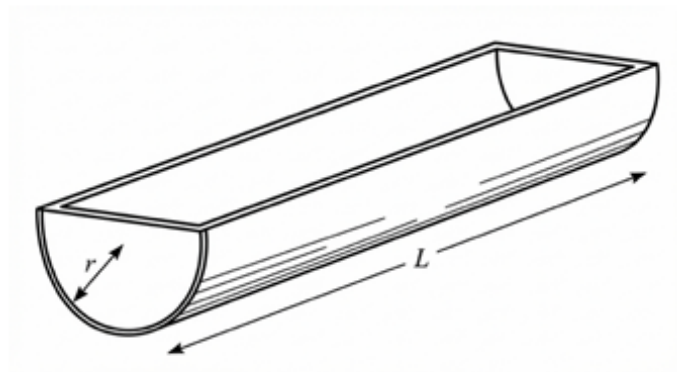
JUNIO 2026 RESERVA - PROBLEMA 4.2



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



- 4.2** Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

- 4.2.1 (1 punto)** Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .
- 4.2.2 (1.5 puntos)** Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

4.2.1 Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

Se definen las variables del problema r : radio del semicírculo en cm ;

L : Longitud del comedero en cm .

La expresión del área total del comedero en función de r y L es:

$$A = 2 \cdot A_{\text{semicírculo}} + A_{\text{Lateral}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L}{2} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot L$$

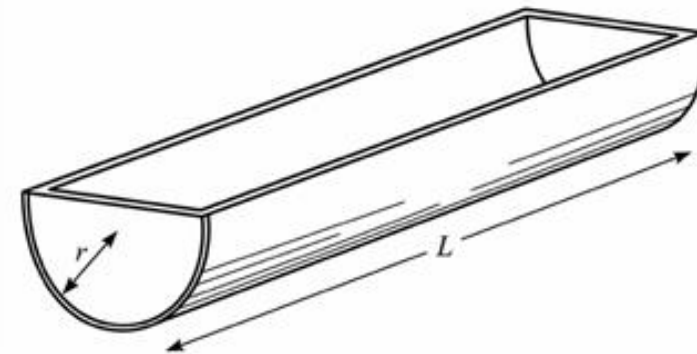
Se iguala la expresión del área total del comedero a su valor y se despeja L en función de r .

$$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot L = 600 \cdot \pi \rightarrow r^2 + r \cdot L = 600 \rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r}$$

El volumen del comedero en función de r y L es: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L}{2}$

Sustituyendo L en el volumen se obtiene la expresión pedida: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{600 - r^2}{r}\right)}{2}$

$$V = \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot (600 - r^2) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$$



La función que describe el volumen del comedero en función del radio r es: $V(r) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$

4.2.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Además de la expresión analítica de la función del volumen, necesito encontrar su dominio de definición.

$$\begin{cases} r > 0 \\ L > 0 \end{cases} \rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r} > 0 \xrightarrow{r > 0} 600 - r^2 > 0$$

Se iguala la expresión a cero y se hace un estudio de signos de la expresión cuadrática.

$$600 - r^2 = 0 \rightarrow r = \pm\sqrt{600} = \pm 10\sqrt{6} \xrightarrow{r > 0} r = 10\sqrt{6} \approx 24,4949 \text{ cm}$$

	0	$10\sqrt{6}$	$+\infty$
$600 - r^2$	+	-	

$$600 - r^2 \xrightarrow{r = 1} 600 - 1^2 = 599 > 0$$

$$600 - r^2 \xrightarrow{r = 25} 600 - 25^2 = -25 < 0$$

Siendo el dominio de $V(r)$: $r \in (0, 10\sqrt{6})$

4.2.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

$$V(r) = 300 \cdot \pi \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3 \quad \text{Se deriva la función, se iguala a cero y se hace un estudio de signos de } V(r) \text{ en su dominio de definición.}$$

$$V'(r) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 0 \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 300 \cdot \pi \xrightarrow{r > 0} r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,1421 \text{ cm}$$

	0	$10\sqrt{2}$	$10\sqrt{6}$
$V'(r)$		+	-
$V(r)$			

$$V'(1) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 > 0$$

$$V'(15) = 300 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 15^2 < 0$$

Nota: Para demostrar que es máximo también se puede usar el criterio de la segunda derivada.

Se calcula la longitud del comedero $L = \frac{600 - (10\sqrt{2})^2}{10\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} \text{ cm} = 20\sqrt{2} \text{ cm} \approx 28,2843 \text{ cm}$

Se calcula el volumen máximo: $V(10\sqrt{2}) = 300 \cdot \pi \cdot 10\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} \cdot (10\sqrt{2})^3 = 2000\sqrt{2} \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 8885,77 \text{ cm}^3$

El valor de r que maximiza el volumen es: $r = 10\sqrt{2} \text{ cm} \approx 14,1421 \text{ cm}$

El valor de L que maximiza el volumen es: $L = 20\sqrt{2} \text{ cm} \approx 28,2843 \text{ cm}$

El volumen máximo es: $2000\sqrt{2} \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 8885,77 \text{ cm}^3$