



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

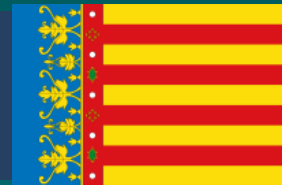
$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

JUNIO 2026 - PROBLEMA 4.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

JUNIO 2026 · PROBLEMA 4.1

Problema 4.1

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

La función es continua en su dominio, es decir, en $\mathbb{R}$.

Dado que $f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$, **no posee asíntotas verticales**.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Problema 4.1

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Se iguala la derivada a cero:
$$\frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$$

Se resuelve la ecuación:
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-3) < 0 \quad f'(0) > 0 \quad f'(1) < 0$

	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

$f(x)$ **decrece** en $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$

$f(x)$ **crece** en $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f . $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

En $x = -1 - \sqrt{2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-1 - \sqrt{2} + 1}{(-1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

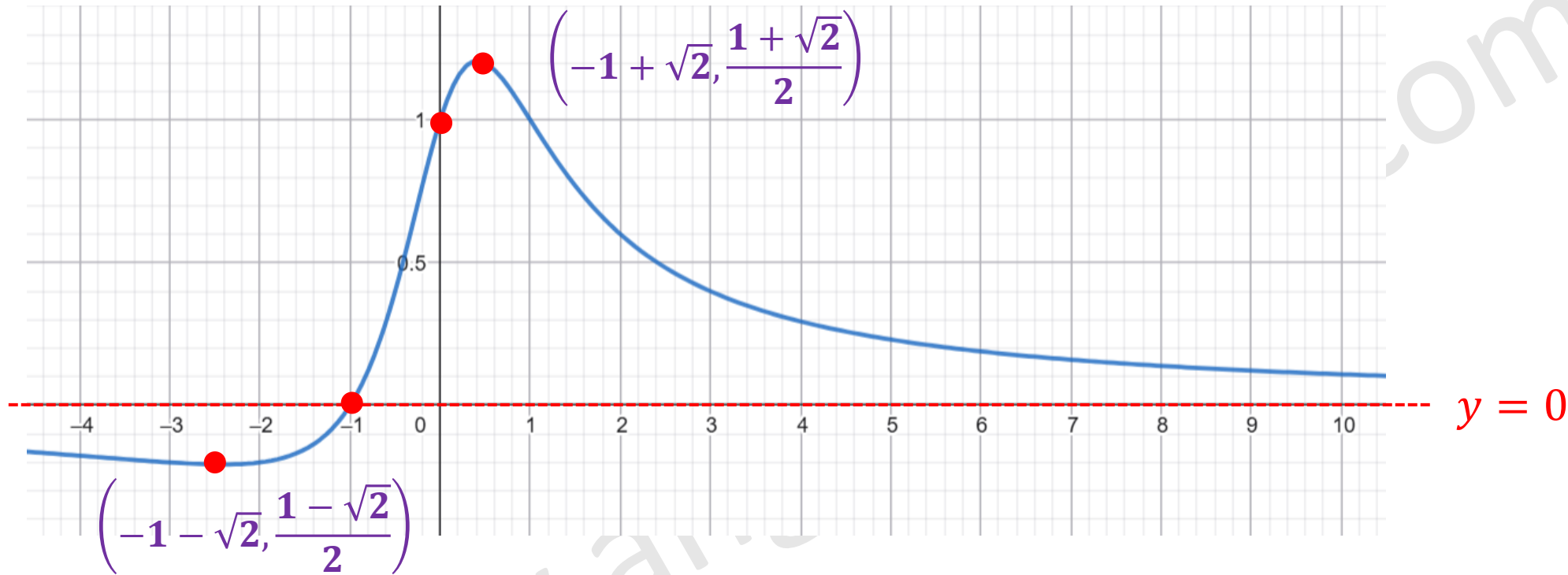
En $x = -1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + \sqrt{2} + 1}{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

Mínimo relativo en el punto $\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Máximo relativo en el punto $\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$

Como la función decrece, después crece y finalmente vuelve a decrecer, y además tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$, **el mínimo relativo y el máximo relativo son también absolutos.**

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f . $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$



Para hacer la representación gráfica, te recomiendo que obtengas el punto de corte con el eje Y . En este caso es el $(0,1)$. También te vendrá bien calcular el punto de corte con el eje X . En este caso es el $(-1,0)$. Te ayudará a representar mejor la función.