



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

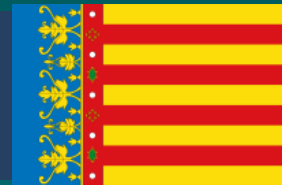
www.angelcuestaarza.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.2





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelcuesta.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.2

Problema 2.2

Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 Comprobar que para todo valor real α la matriz A es ortogonal. $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Para comprobar que una matriz A es ortogonal, basta verificar que $A \cdot A^T = I$

Se escribe la matriz transpuesta $A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Se calcula el producto $A \cdot A^T$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se ha utilizado la relación fundamental: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Por lo tanto, **la matriz A es ortogonal** para todo valor de α .

2.2.2 Determinar los valores de a y b para que la matriz B sea ortogonal.
¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si una matriz es ortogonal y cumple que $B^T = B^{-1}$, entonces verifica que $B \cdot B^T = I$

Se escribe la matriz transpuesta $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se calcula el producto $B \cdot B^T$.

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + a \cdot a & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + a \cdot 0 & 0 \cdot b + 0 \cdot 0 + a \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot a & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot b + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ b \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot a & b \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & b \cdot b + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \quad \text{Dos matrices son iguales si lo son todos sus términos } a_{ij}.$$

Existen 4 matrices ortogonales: $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

2.2.3 Resuelve la ecuación matricial con incógnita X donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se despeja X de la ecuación matricial. $B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Se multiplica por la inversa de B a ambos lados de la ecuación. Por ser B ortogonal, la inversa es la transpuesta.

$$B^T \cdot B \cdot X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow I \cdot X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se calcula X en función de a y b . $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$ Como $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$

Las 4 matrices solución son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$