



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

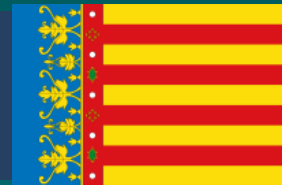
www.angelscuesta.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.1





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelcuesta.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.1

Problema 2.1

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden

3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden

3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Se calcula el producto $T \cdot v$:

$$T \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + my \\ mx + 2y \\ z \end{pmatrix}$$

Se escribe la igualdad $T \cdot v = u$:

$$\begin{pmatrix} 2x + my \\ mx + 2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus términos a_{ij} .

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada). $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de m mediante un determinante. Lo desarrollo por la tercera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $4 - m^2 = 0 \longrightarrow m^2 = 4 \longrightarrow m = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Si $m \neq \pm 2$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow[\text{3} \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $m = \pm 2$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $m = \pm 2$ en las matrices A y A^* .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $m = -2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si $m = -2 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	2	-2	0	4
F_1	-2	2	0	4
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	8

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $m = -2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $m = 2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \qquad \qquad \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

F_2	2	2	0	4
F_1	2	2	0	4
$F_2 = F_2 - F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene también dos filas linealmente independientes. Para $m = 2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de sistema	Número de soluciones
Si $m \neq \pm 2$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $m = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $m = 2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas soluciones

Problema 2.1

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $m = \pm 2$. Por lo tanto, el sistema en este caso tiene solución única. Se utilizará la regla de Cramer para resolver el sistema. Puedes usar Gauss si quieres.

Recordamos que: $|A| = 4 - m^2$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{12}{4 - (-1)^2} = \frac{12}{3} = 4$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{12}{4 - (-1)^2} = \frac{12}{3} = 4$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{-6}{4 - (-1)^2} = \frac{-6}{3} = -2$$

Esta incógnita ya estaba despejada en el sistema de ecuaciones. Se ha hecho con fines pedagógicos.

La solución del sistema es: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

Solución: Se calcula en primer lugar la matriz, $T - \alpha \cdot I$ $T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m=2} T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T - \alpha \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Se calcula $\det(T - \alpha \cdot I)$ desarrollando el determinante por la tercera fila.

$$|T - \alpha \cdot I| = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 \\ 2 & 2-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot [(2-\alpha)^2 - 4] = 0$$

$$1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

Se iguala a cero cada factor.

$$(2 - \alpha)^2 - 4 = 0 \rightarrow (2 - \alpha)^2 = 4 \rightarrow 2 - \alpha = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} 2 - \alpha = -2 \rightarrow \alpha = 4 \\ 2 - \alpha = 2 \rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Las tensiones principales de T son $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 4$