



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

**PROBABILIDAD
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

www.angelcuestaarza.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 1



PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 1

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus virus X . Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos.

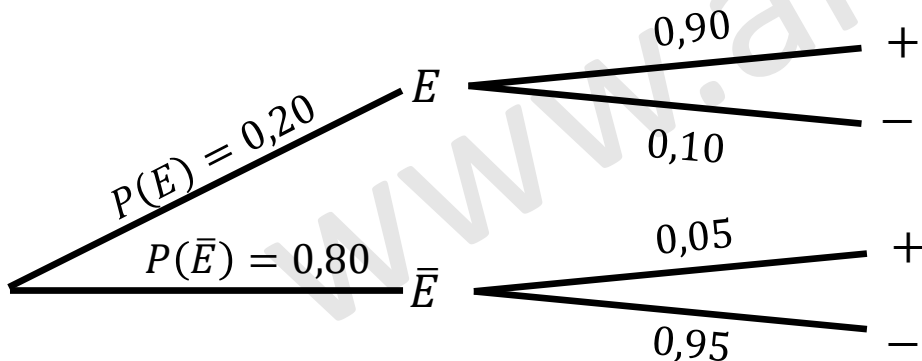
1.1 Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

$E = \{\text{La persona está enferma}\}$ $\bar{E} = \{\text{La persona no está enferma}\}$

$+= \{\text{El test da positivo}\}$ $- = \{\text{El test da negativo}\}$

Se representa el diagrama de árbol correspondiente.



PROBLEMA 1

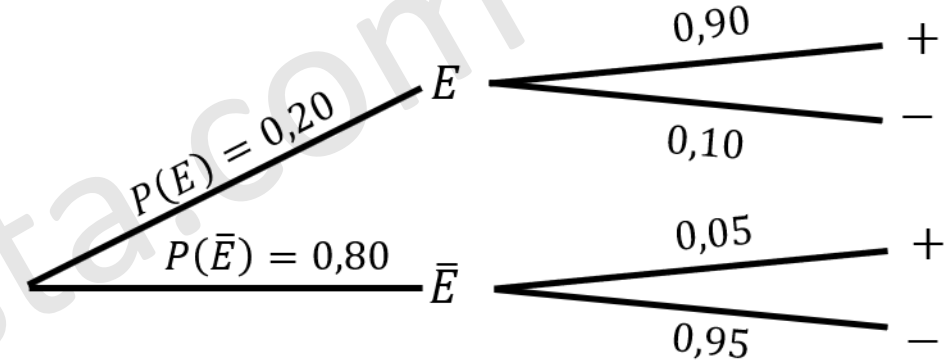
1.1 Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(+) = P(E \cap +) + P(\bar{E} \cap +)$$

$$P(+) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\bar{E}) \cdot P(+/\bar{E})$$

$$P(+) = 0,20 \cdot 0,90 + 0,80 \cdot 0,05 = 0,22$$



La probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo. es **0,22 (22 %)** .

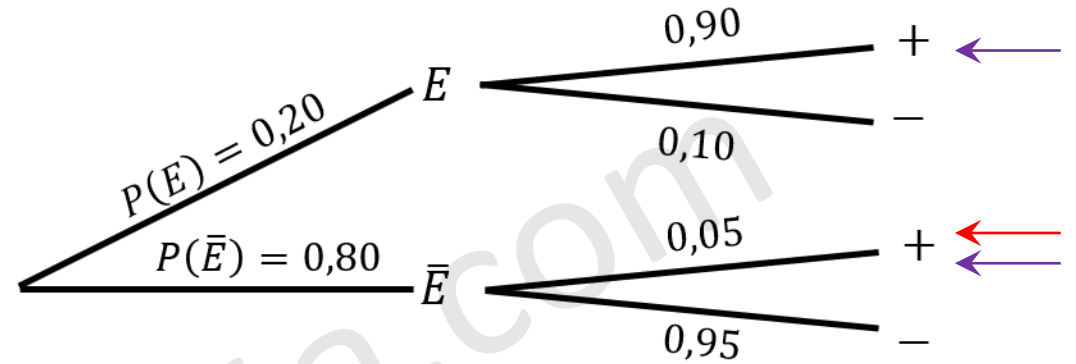
1.2 Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad a posteriori).

$$P(\bar{E}/+) = \frac{P(\bar{E} \cap +)}{P(+)}$$

$$P(\bar{E}/+) = \frac{P(\bar{E}) \cdot P(+/\bar{E})}{P(+)} = \frac{0,80 \cdot 0,05}{0,22} \approx 0,1818$$

La probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test es **0,1818 (18,18%)** aproximadamente.



1.3 Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Definimos la variable aleatoria X : X =número de personas enfermas

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 8; p = 0,2; q = 0,8$ $X \sim Bi(8; 0,2)$

Se calcula la probabilidad pedida $P(X \leq 2)$ utilizando la tabla (me evita hacer los cálculos)

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367

$$P(X \leq 2) = 0,7969$$

La probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad es **0,7969** (79,69%).

NOTA: Puedes hacer el cálculo de la probabilidad usando la fórmula, pero es más largo.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelscuesta.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.1



Problema 2.1

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden

3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden

3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Se calcula el producto $T \cdot v$:
$$T \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + my \\ mx + 2y \\ z \end{pmatrix}$$

Se escribe la igualdad $T \cdot v = u$:
$$\begin{pmatrix} 2x + my \\ mx + 2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus términos a_{ij} .
$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada). $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de m mediante un determinante. Lo desarrollo por la tercera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $4 - m^2 = 0 \longrightarrow m^2 = 4 \longrightarrow m = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Si $m \neq \pm 2$ entonces $|A| \neq 0$, $\mathbf{Ran}(A) = 3$ $\xrightarrow[\mathbf{3 \leq Ran}(A^*) \leq 3]{\mathbf{Ran}(A) \leq \mathbf{Ran}(A^*) \leq 3}$ $\mathbf{Ran}(A^*) = 3$

Si $m = \pm 2$ entonces $|A| = 0$, $\mathbf{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $m = \pm 2$ en las matrices A y A^* .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $m = -2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si $m = -2 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	2	-2	0	4
F_1	-2	2	0	4
$F_2=F_2+F_1$	0	0	0	8

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $m = -2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $m = 2$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \qquad \qquad \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

F_2	2	2	0	4
F_1	2	2	0	4
$F_2 = F_2 - F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene también dos filas linealmente independientes. Para $m = 2$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

Problema 2.1

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de sistema	Número de soluciones
Si $m \neq \pm 2$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $m = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $m = 2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas soluciones

Problema 2.1

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $m = \pm 2$. Por lo tanto, el sistema en este caso tiene solución única. Se utilizará la regla de Cramer para resolver el sistema. Puedes usar Gauss si quieres.

Recordamos que: $|A| = 4 - m^2$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{12}{4 - (-1)^2} = \frac{12}{3} = 4$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{12}{4 - (-1)^2} = \frac{12}{3} = 4$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{-6}{4 - (-1)^2} = \frac{-6}{3} = -2$$

Esta incógnita ya estaba despejada en el sistema de ecuaciones. Se ha hecho con fines pedagógicos.

La solución del sistema es: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

Solución: Se calcula en primer lugar la matriz, $T - \alpha \cdot I$ $T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m=2} T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T - \alpha \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Se calcula $\det(T - \alpha \cdot I)$ desarrollando el determinante por la tercera fila.

$$|T - \alpha \cdot I| = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 \\ 2 & 2-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot [(2-\alpha)^2 - 4] = 0$$

$$1 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

Se iguala a cero cada factor.

$$(2 - \alpha)^2 - 4 = 0 \rightarrow (2 - \alpha)^2 = 4 \rightarrow 2 - \alpha = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} 2 - \alpha = -2 \rightarrow \alpha = 4 \\ 2 - \alpha = 2 \rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Las tensiones principales de T son $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 4$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

www.angelcuestaarza.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 2.2



Problema 2.2

Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 Comprobar que para todo valor real α la matriz A es ortogonal. $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Para comprobar que una matriz A es ortogonal, basta verificar que $A \cdot A^T = I$

Se escribe la matriz transpuesta $A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Se calcula el producto $A \cdot A^T$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se ha utilizado la relación fundamental: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Por lo tanto, **la matriz A es ortogonal** para todo valor de α .

2.2.2 Determinar los valores de a y b para que la matriz B sea ortogonal.
¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si una matriz es ortogonal y cumple que $B^T = B^{-1}$, entonces verifica que $B \cdot B^T = I$

Se escribe la matriz transpuesta $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se calcula el producto $B \cdot B^T$.

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + a \cdot a & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + a \cdot 0 & 0 \cdot b + 0 \cdot 0 + a \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot a & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot b + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ b \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot a & b \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & b \cdot b + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \quad \text{Dos matrices son iguales si lo son todos sus términos } a_{ij}.$$

Existen 4 matrices ortogonales: $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

2.2.3 Resuelve la ecuación matricial con incógnita X donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se despeja X de la ecuación matricial. $B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Se multiplica por la inversa de B a ambos lados de la ecuación. Por ser B ortogonal, la inversa es la transpuesta.

$$B^T \cdot B \cdot X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow I \cdot X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se calcula X en función de a y b . $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$ Como $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$

Las 4 matrices solución son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

www.angelcuesta.com

JUNIO 2026 - PROBLEMA 3.1



PROBLEMA 3.1

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

Solución:

La recta y el plano serán perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean paralelos.

Necesitaremos el vector director de la recta (se toma el punto porque hará falta después). $P = (0, -1, 1); \vec{u} = (2, -1, 1)$

Necesitaremos conocer el vector normal del plano. $\vec{n} = (2, m, 1)$

Dos vectores son paralelos si son proporcionales: $\vec{u} \parallel \vec{n} \rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{1} \longrightarrow m = -1$

Si $m = -1$ la recta y el plano son perpendiculares.

PROBLEMA 3.1

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

Solución:

La recta y el plano serán paralelos cuando el vector director de la recta y el normal del plano sean perpendiculares.

Recordamos que: $P = (0, -1, 1); \vec{u} = (2, -1, 1) \quad \vec{n} = (2, m, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 4 - m + 1 = 0 \longrightarrow m = 5$$

Si $m = 5$ la recta y el plano son paralelos.

Para $m = 5$, comprobamos si la recta está contenida en el plano tomando un punto de la recta.

$$2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 1 - 3 = -7 \neq 0 \quad \text{El punto no pertenece al plano.}$$

Si $m = 5$ la recta no está contenida en el plano.

PROBLEMA 3.1

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

Solución: Se obtiene un punto genérico de la recta y se sustituye en la ecuación del plano. $P_\lambda = (2\lambda, -1 - \lambda, 1 + \lambda)$

$$2x + my + z - 3 = 0 \longrightarrow 2 \cdot 2\lambda + m \cdot (-1 - \lambda) + 1 + \lambda - 3 = 0 \longrightarrow 4\lambda - m - m\lambda + 1 + \lambda - 3 = 0$$

$$4\lambda - m\lambda + \lambda = m + 2 \longrightarrow \lambda \cdot (5 - m) = m + 2 \longrightarrow \lambda = \frac{m + 2}{5 - m}$$

Se sustituye el valor del parámetro en las coordenadas del punto genérico (esto equivale a sustituir en las ecuaciones paramétricas de la recta).

$$P = \left(2 \cdot \left(\frac{m + 2}{5 - m} \right), -1 - \frac{m + 2}{5 - m}, 1 + \frac{m + 2}{5 - m} \right) = \left(\frac{2m + 4}{5 - m}, \frac{-7}{5 - m}, \frac{7}{5 - m} \right)$$

La intersección entre recta y plano es: $P = \left(\frac{2m + 4}{5 - m}, \frac{-7}{5 - m}, \frac{7}{5 - m} \right)$, **siendo $m \neq 5$**

©Angel Cuesta Arza



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

www.angelcuesta.com

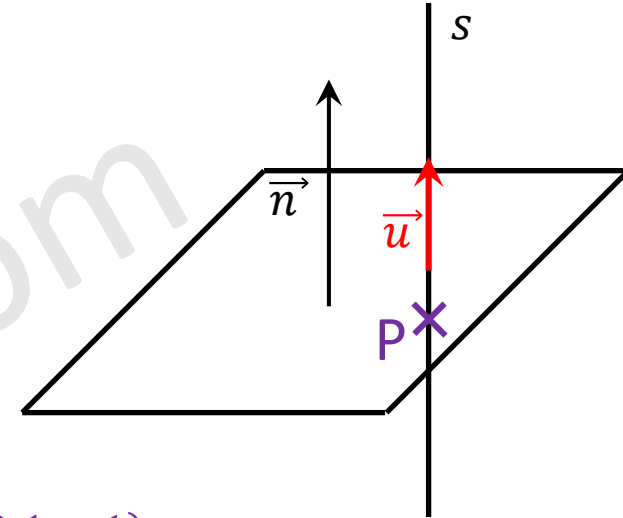
JUNIO 2026 - PROBLEMA 3.2



PROBLEMA 3.2

Consideramos la recta s del espacio con ecuación: $s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$ Se pide

- a) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .
- b) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.
- c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .



Solución: A partir de la ecuación continua se deduce el vector director de la recta s . $\vec{u} = (0,1,-1)$

El vector normal del plano pedido es igual que el vector director de la recta s . $\vec{n} = \vec{u} = (0,1,-1)$

A partir del vector normal $\vec{n} = (0,1,-1)$ y del punto $(1,1,1)$ se calcula la ecuación del plano pedido.

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) - C \cdot (z - z_0) = 0$$

$$0 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot (z - 1) = 0 \longrightarrow y - z = 0$$

La ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s π : $y - z = 0$

PROBLEMA 3.2

Consideramos la recta s del espacio con ecuación: $s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$ Se pide

b) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen. $P = (1, 1, 1); \vec{u} = (0, 1, -1)$

Se obtiene un punto genérico de la recta y se calcula la distancia de dicho punto al origen. $P_\lambda = (1, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$

Se aplica la fórmula correspondiente. $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

$$d = \sqrt{(1 - 0)^2 + ((1 + \lambda) - 0)^2 + ((1 - \lambda) - 0)^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} = \sqrt{2\lambda^2 + 3} = 4$$

$$2\lambda^2 + 3 = 16 \rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{2} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{13}{2}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Se sustituyen los valores de λ obtenidos en el punto genérico y se obtienen los puntos pedidos.

Los puntos pedidos son: $\mathbf{Q} = \left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$ y $\mathbf{R} = \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$

PROBLEMA 3.2

Consideramos la recta s del espacio con ecuación: $s: \frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$ Se pide

c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

Solución: Se recuerda el vector director de la recta s . $\vec{u} = (0,1,-1)$

El vector director del eje Z es: $\vec{v} = (0,0,1)$

El ángulo entre las rectas es el que forman los vectores directores.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(0,1,-1) \cdot (0,0,1)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

El ángulo que forma la recta con el eje Z es 45° .



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

JUNIO 2026 - PROBLEMA 4.1



Problema 4.1

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

La función es continua en su dominio, es decir, en $\mathbb{R}$.

Dado que $f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$, **no posee asíntotas verticales**.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Por consiguiente $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$. No hay asíntota oblicua, puesto que hay asíntota horizontal.

Problema 4.1

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Se iguala la derivada a cero:
$$\frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$$

Se resuelve la ecuación:
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-3) < 0 \quad f'(0) > 0 \quad f'(1) < 0$

	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

$f(x)$ **decrece** en $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$

$f(x)$ **crece** en $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f . $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

A partir del estudio de signos de la función derivada deducimos los máximos y mínimos relativos.

	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

En $x = -1 - \sqrt{2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-1 - \sqrt{2} + 1}{(-1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

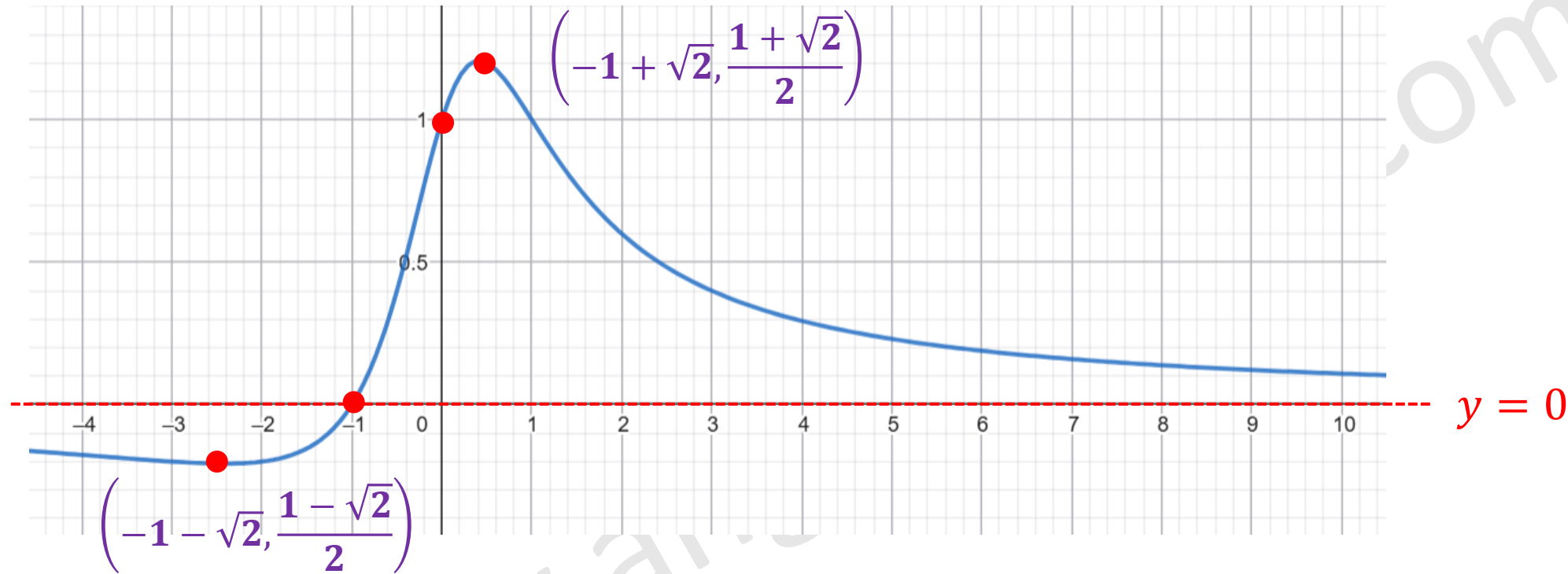
En $x = -1 + \sqrt{2}$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + \sqrt{2} + 1}{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

Mínimo relativo en el punto $\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

Máximo relativo en el punto $\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$

Como la función decrece, después crece y finalmente vuelve a decrecer, y además tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$, **el mínimo relativo y el máximo relativo son también absolutos.**

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f . $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$



Para hacer la representación gráfica, te recomiendo que obtengas el punto de corte con el eje Y . En este caso es el $(0,1)$. También te vendrá bien calcular el punto de corte con el eje X . En este caso es el $(-1,0)$. Te ayudará a representar mejor la función.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

JUNIO 2026 · PROBLEMA 4.2



Problema 4.2

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

- 4.2.1 (1.25 puntos)** Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.
- 4.2.2 (1 punto)** Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.
- 4.2.3 (0.25 puntos)** La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

www.3

Problema 4.2

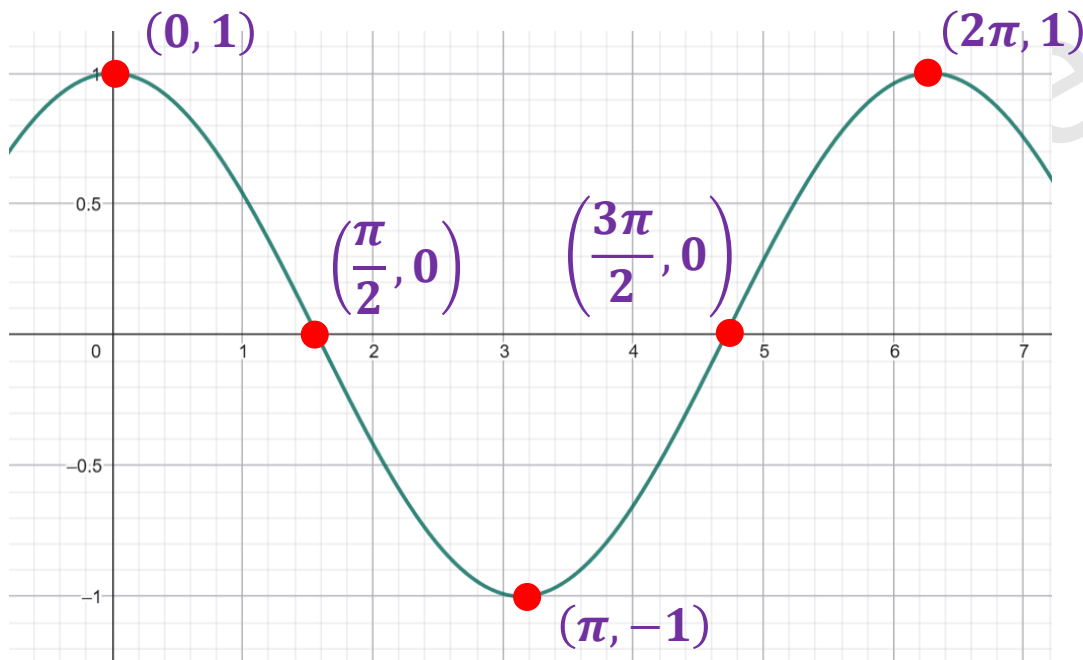
$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

La función coseno está definida en todos los reales, por lo tanto, está definida en el intervalo $[0,12]$.

Para poder representar esta función, podemos partir de la base de la función $f(x) = \cos x$

Dicha función es periódica, con un período 2π . Y su imagen oscila entre -1 y 1 . Corta al eje X en los puntos $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$. Se muestra la gráfica. **Recuerda:** debes trabajar en radianes.



Problema 4.2

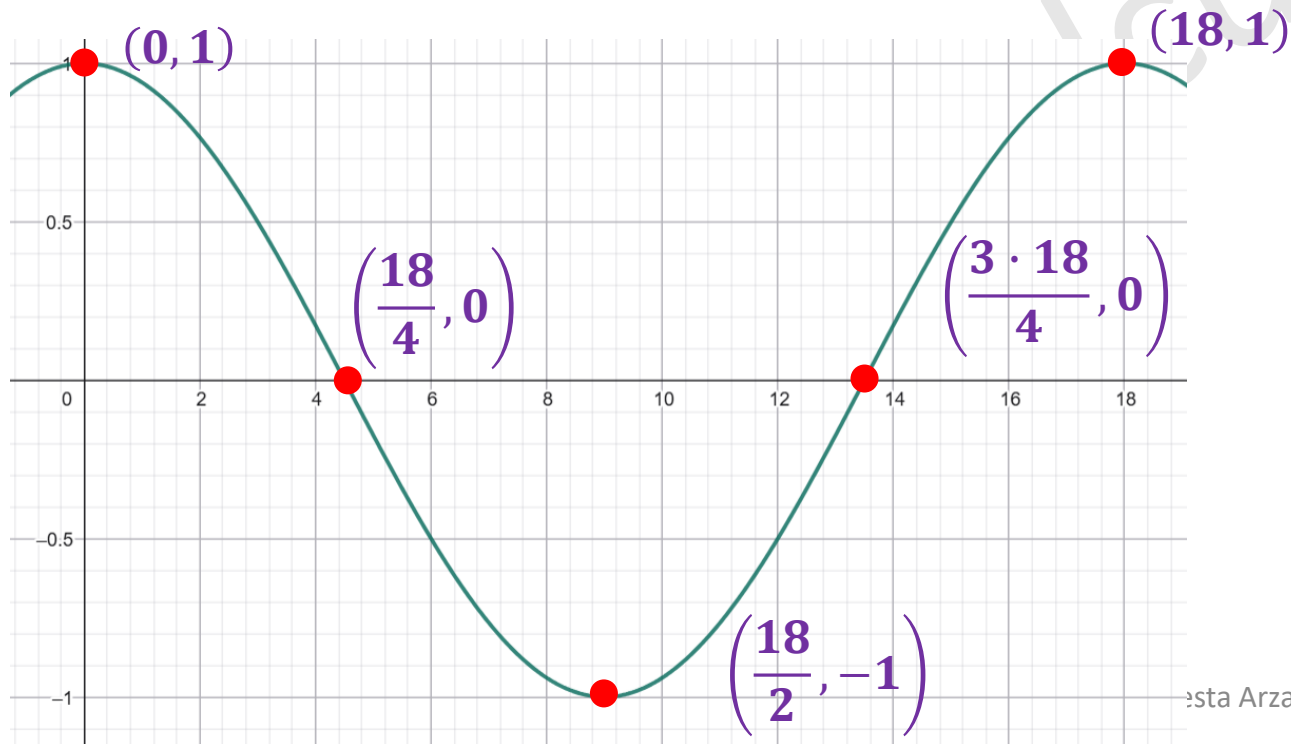
$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

Cuando la variable está multiplicada por un número, debemos obtener el nuevo período. Para ello debemos tener en cuenta la siguiente propiedad de la función coseno.

Dada $f(x) = \cos(kx)$, el periodo de la función es: $T = \frac{2\pi}{k}$

En este ejercicio: $T = \frac{2\pi}{\pi/9} = 18$ Lo cual significa que la función completa recorre 18 unidades hasta completar un ciclo.

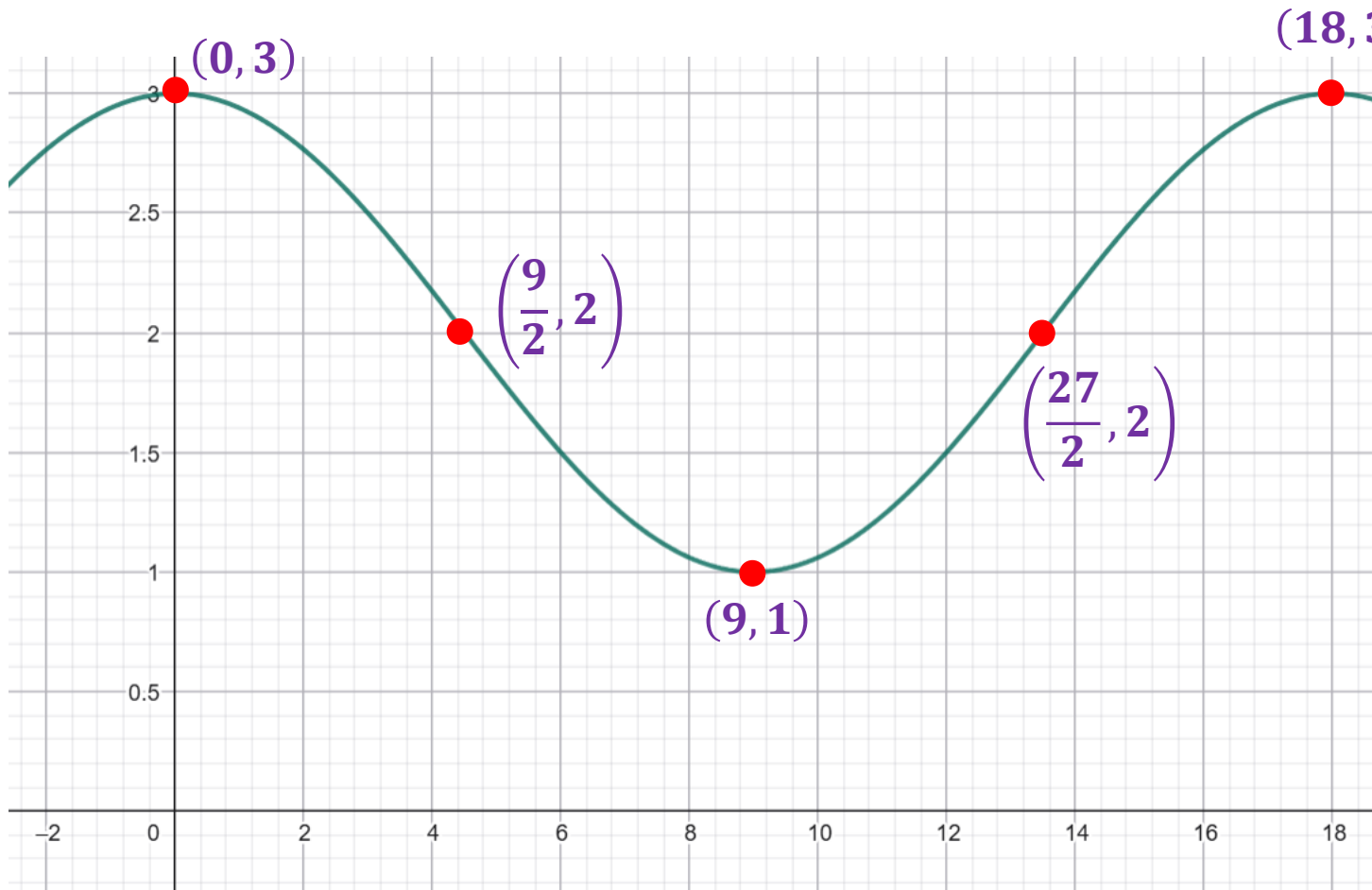


Problema 4.2

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

Ahora solo quedaría sumarle dos a todos y cada uno de los puntos de la función. Se expresarán los números clave en forma de fracción o números decimales.

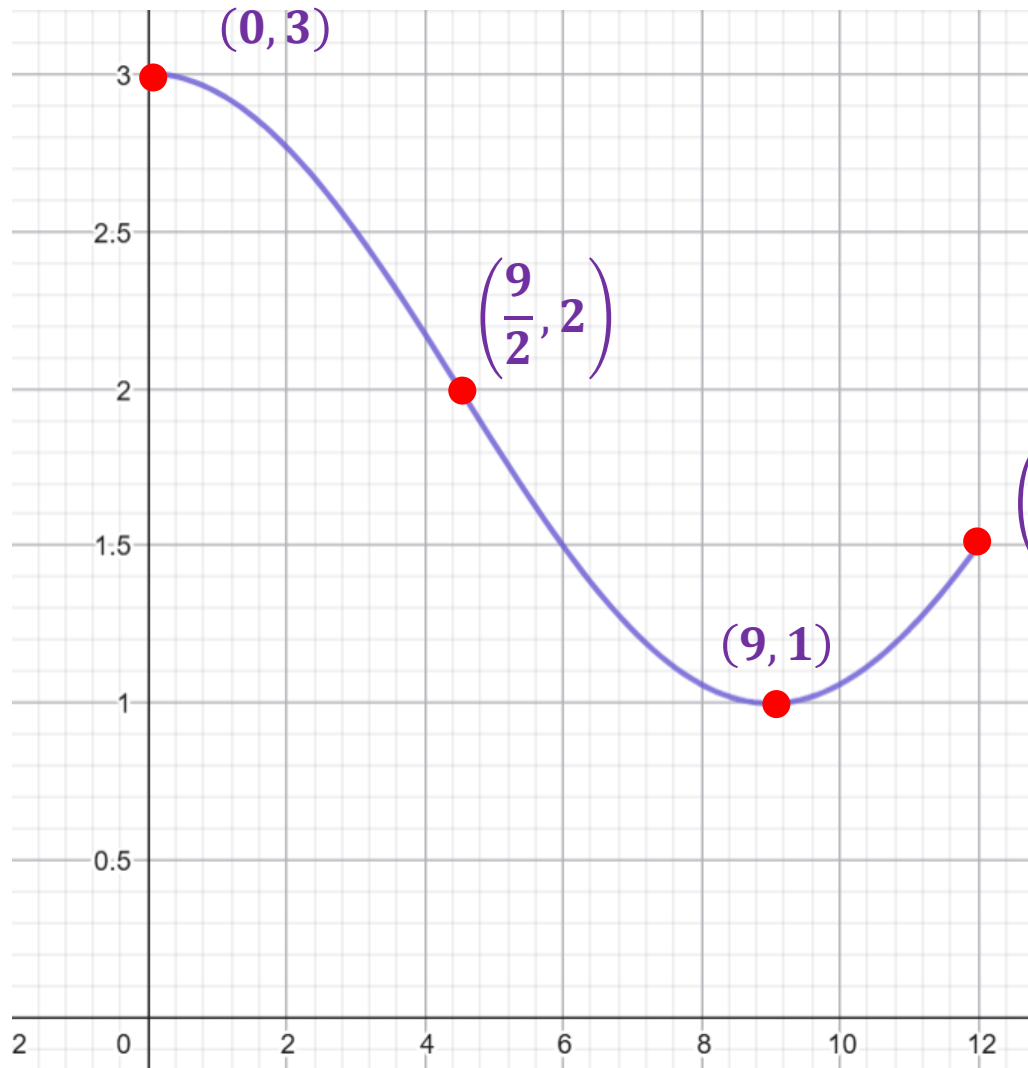


En la siguiente diapositiva se muestra la gráfica final ajustada al dominio de definición que nos dan en el enunciado.

Problema 4.2

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.



Se da el valor $x = 12$ a la función para terminar la representación.

$$f(12) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) + 2 = \frac{3}{2}$$

Problema 4.2

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

El único punto de corte con los ejes es el punto de corte con el eje Y .

El punto de corte es $(0, 3)$.

La función tiene un máximo y un mínimo absoluto.

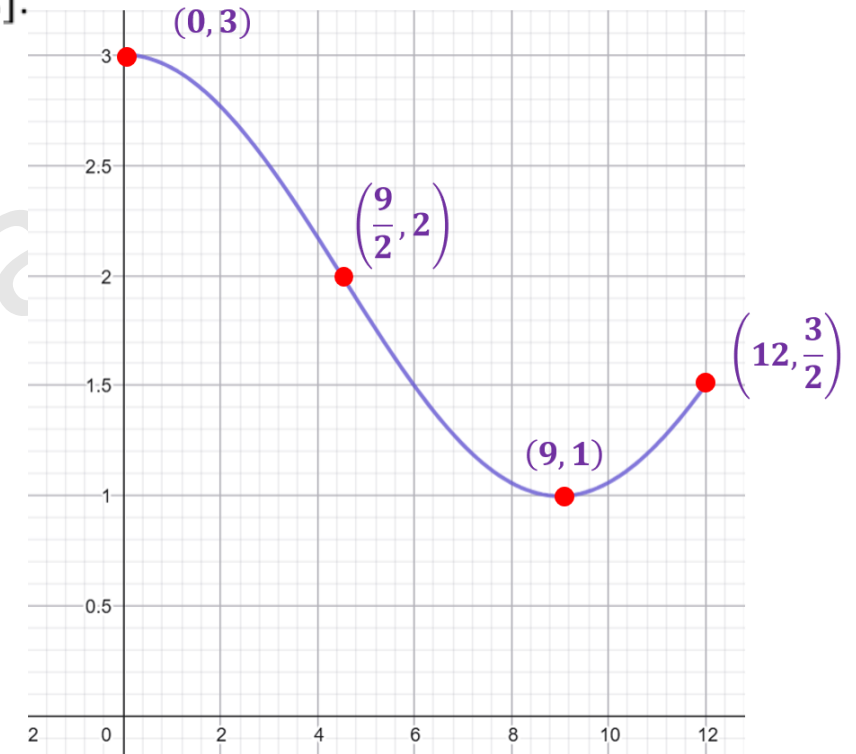
El máximo absoluto es $(0, 3)$.

El mínimo absoluto es $(9, 1)$.

A partir de la gráfica se deduce la monotonía (no hace falta derivar).

$f(x)$ **decrece** en $x \in (0, 9)$

$f(x)$ **crece** en $x \in (9, 12)$



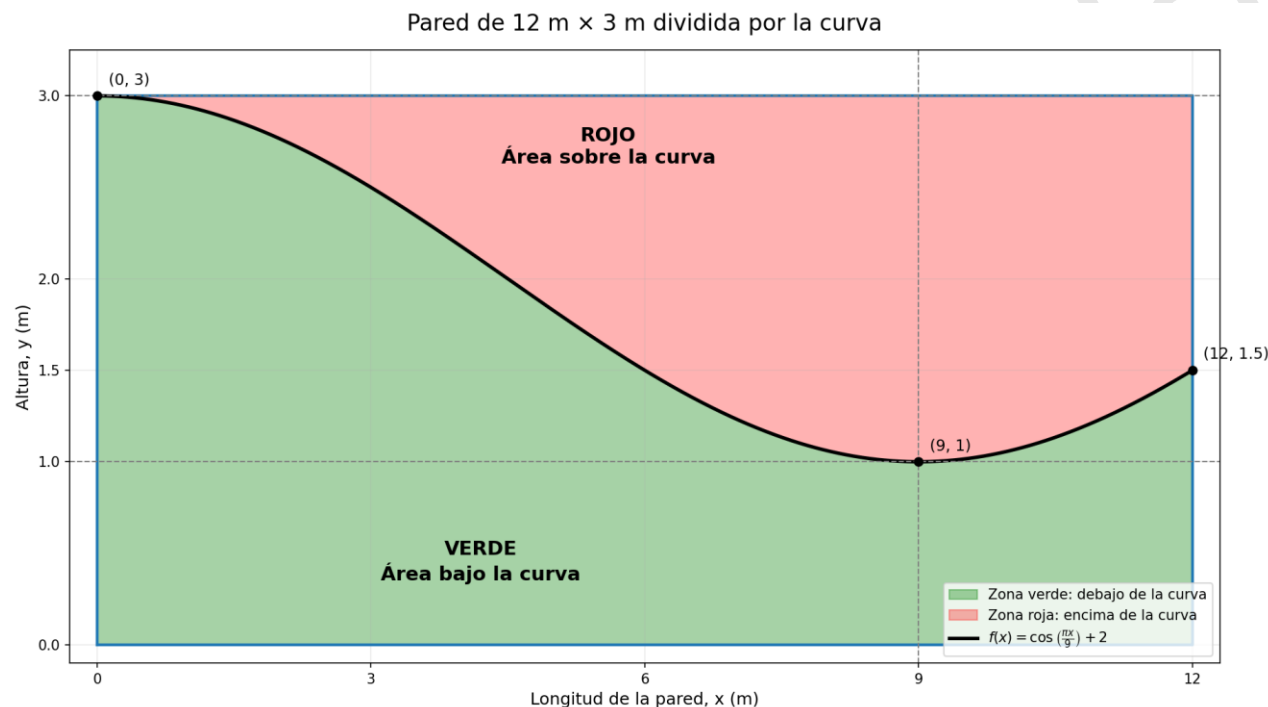
4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

Se dibuja un esquema de la situación.



$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

La parte de color verde se calcula mediante una integral definida.

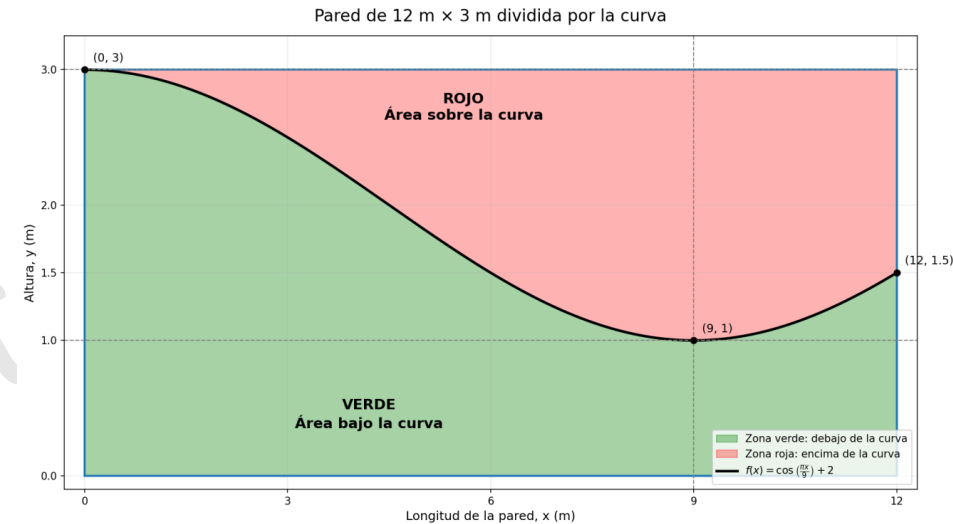
$$A_{verde} = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) dx + \int_0^{12} 2 dx =$$

$$= \frac{9}{\pi} \cdot \int_0^{12} \frac{\pi}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) dx + \int_0^{12} 2 dx = \frac{9}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) \right]_0^{12} + [2x]_0^{12} =$$

$$= \frac{9}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) \right] + (2 \cdot 12 - 2 \cdot 0) = \frac{9}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21,519 \text{ m}^2$$

El área total de la pared es: $A_{pared} = 12 \cdot 3 = 36 \text{ m}^2$

El área pintada de color rojo: $A_{rojo} = 36 - \left(24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \right) = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14,481 \text{ m}^2$



La pared tiene de color verde $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2$ y de color rojo $12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \text{ m}^2$.

Problema 4.2

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Basta con dividir la superficie de la pared verde entre el número de metros cuadrados que cubre cada bote.

$$N = \frac{21,519}{3} = 7,173$$

Se necesitan al menos **8 botes** de pintura.