Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2022

Problema 6
Problema de optimización

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Julio 2021
Problema 6

PAU Junio 2021
Problema 6

PAU Septiembre 2020
Problema 6

PAU Julio 2020
Problema 6

PAU Julio 2019
Problema B3

PAU Junio 2019
Problema B3

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Optimización de funciones.
2) Estudio de la monotonía.

Herramientas utilizadas:

1) Funciones.
2) Derivadas.

PROBLEMA 6

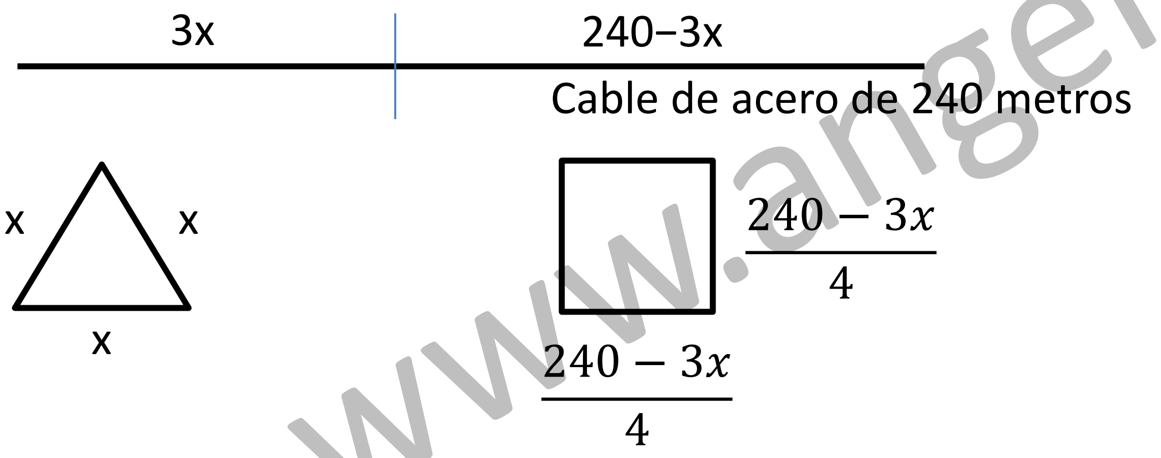
Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes iguales un cable de acero de 240 metros de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Solución:

En primer lugar se hace un esquema de la situación.



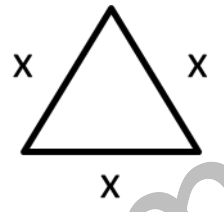
Los posibles valores de x, se calculan teniendo en cuenta que el lado de los polígonos debe ser positivo.

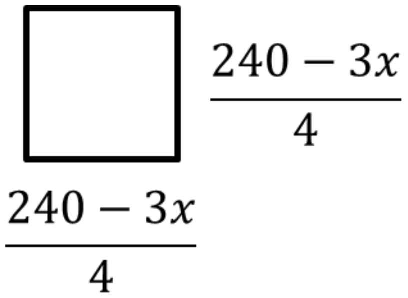
$$\frac{240-3x}{4} \geq 0 \longrightarrow 240-3x \geq 0 \longrightarrow 240 \geq 3x$$

$$\mathbf{80 \geq x}$$

Y puesto que x debe ser un número positivo: $\mathbf{0 \leq x \leq 80}$

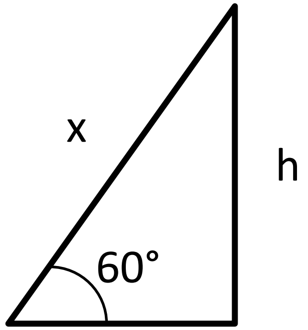
PROBLEMA 6





A continuación expresaré el área del triángulo y del cuadrado en función de x.

Para ello, debo expresar la altura del triángulo en función de x. Utilizaré la trigonometría, teniendo en cuenta que los ángulos del triángulo equilátero son 60°.



$$sen(60°)=\frac{h}{x}\longrightarrow h=x\cdot sen(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x$$

El área del triángulo será: $A_T=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{4}$

Por otor lado, el área del cuadrado será: $A_C=lado^2=\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2=\frac{57600-1440x+9x^2}{16}$

La función pedida, es decir, la suma de las áreas será:

$$A(x)=A_T+A_C=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{4}}+\boldsymbol{\frac{57600-1440x+9x^2}{16}}$$

Siendo el dominio de la función**:** $\boldsymbol{0\leq x\leq 80}$

PROBLEMA 6

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Al operar la expresión obtenida en el apartado a), podemos observar que debemos calcular el mínimo de una función cuadrática. El coeficiente del término cuadrático es positivo, lo cual nos indica que el vértice de la función es el mínimo.

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{4}+\frac{57600-1440x+9x^2}{16}=\frac{4\sqrt{3}\cdot x^2+57600-1440x+9x^2}{16}=\frac{9+4\sqrt{3}}{16}\cdot x^2-90x+3600$$

Bastaría con calcular el vértice de la función utilizando la fórmula habitual de 4º de ESO. Pero como este ejercicio está propuesto en las PAU, lo resolveré utilizando derivadas. Por eso, calculo la derivada de la función A(x).

$$A'(x)=\frac{9+4\sqrt{3}}{8}\cdot x-90$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local.

$$\frac{9+4\sqrt{3}}{8}\cdot x-90=0 \longrightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{8}\cdot x=90 \longrightarrow x=\frac{90}{\frac{9+4\sqrt{3}}{8}}=\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\approx 45'2$$

Aunque ya hemos indicado que es un mínimo, vamos a comprobarlo utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

PROBLEMA 6

$$A'(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} \cdot x - 90$$

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente. $A''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8}$

$$A''\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva, eso significa que en el valor de x obtenido hay un mínimo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

La longitud de cable empleada es la construcción del triángulo será: $L_T = 3 \cdot x = 3 \cdot \frac{720}{9+4\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{2160}}{\mathbf{9+4\sqrt{3}}} \approx \mathbf{135'6\ m}$

La longitud de cable empleada es la construcción del cuadrado será: $L_C = 240 - L_T = 240 - \frac{2160}{9+4\sqrt{3}} \approx \mathbf{104'4\ m}$

Se calcula el área mínima sustituyendo el valor de x en la función A(x).

$$A\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{9+4\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)^2 - 90 \cdot \left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right) + 3600 \approx \mathbf{1565'87\ m^2}$$

PROBLEMA 6

Solución: para que la suma de las áreas sea mínima, debe construir un triángulo equilátero de **135’6 metros de perímetro** (lado de 45’2 metros) y un cuadrado de **104’4 metros de perímetro** (lado de 26’1 metros). La suma de las áreas de ambos polígonos, será mínima en las condiciones dadas, y será igual a **1565’87 metros cuadrados**.