

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

JUNIO 2021

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$x + y + (a + 1)z = 2$$

$$x + (a - 1)y + 2z = 1$$

$$2x + ay + z = -1$$

- a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Se dan los planos $\pi_1: x + y + z = a - 1$, $\pi_2: 2x + y + az = a$ y $\pi_3: x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

Problema 3. Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

- a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{bmatrix}$, se pide:

- a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m . (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$. (4 puntos)

Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- a) Calculad la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π . (3 puntos)

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

- a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

