Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Junio 2022

Problema 5
Cálculo integral

PROBLEMA 5

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14}\,dx.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$.

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$.

Debemos resolver esta integral racional. Para ello, debemos comprobar cuales son las raíces del polinomio del denominador.

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Como se pude ver, el polinomio posee dos raíces reales que además son diferentes entre ellas. Por ello, para resolver la integral se debe factorizar el denominador y a continuación, resolver la integral mediante la factorización lineal de la expresión que se quiere integrar.

PROBLEMA 5

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14}\,dx.$$

Calculo los valores de A y B para factorizar linealmente la expresión.

$$\frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)}{(x-7)\cdot(x+2)} + \frac{B\cdot(x-7)}{x\cdot(x+2)} \longrightarrow 18 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-7)$$

Se dan los valores de las raíces.

Si x=7 $\longrightarrow 18 = 9A \longrightarrow A = 2$ **Si x=−2** $\longrightarrow 18 = -9B \longrightarrow B = -2$

Quedando la integral:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14}\,dx = \int \frac{A}{x-7}\,dx + \int \frac{A}{x+2}\,dx = \int \frac{2}{x-7}\,dx + \int \frac{-2}{x+2}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{x-7}\,dx - 2\cdot\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14}\,dx = 2\cdot Ln|x-7| + 2\cdot Ln|x+2| + C = \boxed{Ln\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^2 + C}$$

PROBLEMA 5

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$.

Se aplica la regla de Barrow para obtener el valor de la integral definida.

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} = \left[Ln\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^2\right]_8^t = Ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2 - Ln\left(\frac{8-7}{8+2}\right)^2 = Ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2 - Ln\left(\frac{1}{10}\right)^2 = Ln\left(\frac{\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}\right)$$

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} = Ln\left(10\ \cdot \frac{t-7}{t+2}\right)^2 = \boxed{\boldsymbol{Ln\left(\frac{10t-70}{t+2}\right)^2}}$$

PROBLEMA 5

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$.

Se iguala el resultado de la integral anterior al resultado propuesto por el enunciado.

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} = Ln\left(\frac{10t-70}{t+2}\right)^2 = Ln\frac{25}{4}$$ Se aplica el principio de equivalencia entre los logaritmos.

$$\left(\frac{10t-70}{t+2}\right)^2 = \frac{25}{4} \longrightarrow \frac{10t-70}{t+2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \longrightarrow \frac{10t-70}{t+2} = \pm\frac{5}{2}$$ Se resuelven las dos ecuaciones resultantes.

$$\frac{10t-70}{t+2} = \frac{5}{2} \longrightarrow 20t-140 = 5t+10 \longrightarrow 15t = 150 \longrightarrow \boldsymbol{t = 10}$$

$$\frac{10t-70}{t+2} = -\frac{5}{2} \longrightarrow 20t-140 = -5t-10 \longrightarrow 25t = 130 \longrightarrow t = \frac{26}{5} = 5'2$$

Solución no válida.

Solución: El valor de **t es 10.**