Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Julio 2022

Problema 1
Discusión de un sistema de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

PAU Julio 2021

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{a}x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1})z = \boldsymbol{a} \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real $\boldsymbol{a}$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}-\boldsymbol{1} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}-\boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{a}$ utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}-\boldsymbol{1} \end{vmatrix} = -a^2 - \mathrm{a} + 2 \longrightarrow -a^2 - \mathrm{a} + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} \longrightarrow$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Si $a = -2$ o $a = 1$ entonces $|A| = 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3} \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de $\boldsymbol{a}$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Si $a = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=2F_3+F_1]{F_2=2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+3F_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = -2$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$ ***y*** **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$.

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a = 1$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$ ***y*** **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{2}$.

Discusión y resolución del Sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + (\boldsymbol{a} - \mathbf{1})z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} - \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	**Ran(A*)**	**Nº incógnitas**	**Tipo de Sistema**	**Número de soluciones**
Si $a \neq -2$ **y** $a \neq \mathbf{1}$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\boldsymbol{a} = -\mathbf{2}$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = \mathbf{1}$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Puesto que para a=1 el sistema es Compatible Indeterminado, podemos utilizar la misma matriz escalonada que obtuvimos para discutir el sistema, para obtener las infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ z = \boldsymbol{\lambda}; y = \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \longrightarrow x + \boldsymbol{\lambda} = 1 \longrightarrow x = 1 - \boldsymbol{\lambda}$$

La solución del sistema para $a = 1$ es: $\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad ; \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}$

Resolución del Sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + (\boldsymbol{a-1})z = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a-1} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto −2 y 1. Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 - \mathrm{a} + 2 \quad -a^2 - \mathrm{a} + 2 \rightarrow -(a-1)\cdot(a+2)$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-a+1}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)\cdot(a+2)} = \boxed{\frac{1}{a+2}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-2a+2}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-2\cdot(a-1)}{-(a-1)\cdot(a+2)} = \boxed{\frac{2}{a+2}}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-a^2+1}{-a^2 - \mathrm{a} + 2} = \frac{-(\mathrm{a}+1)\cdot(a-1)}{-(a-1)\cdot(a+2)} = \boxed{\frac{a+1}{a+2}}$$