El problema del día

Selectividad C. Valenciana

FÍSICA

Opción A, PROBLEMA 6

Junio 2019

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Cuestión 6

El ^{60}Co se utilizaba como fuente de rayos gamma para ciertos tratamientos de radioterapia. Su periodo de semidesintegración es de 1925 días. Se dispone de una muestra de 100 gramos de ^{60}Co.

a) Calcula el valor de la constante de desintegración radiactiva y de la actividad inicial de la muestra.

b) Si hay que reemplazar la muestra cuando la actividad ha descendido a un tercio de la actividad inicial, ¿cuál es la vida útil en años de una muestra destinada a este uso?

Datos: número de Avogadro, $6 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}; masa molar del ^{60}Co, M=60 g/mol.

Solución:

El período de semidesintegración $T_{1/2}$ es el tiempo que transcurre hasta que el 50% de los núcleos radiactivos de la muestra se desintegra.

A partir de la ley de desintegración radiactiva se puede deducir la relación entre $T_{1/2}$ y λ (constante de desintegración radiactiva).

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \xrightarrow[t = T_{1/2}]{N = \frac{N_0}{2}} \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right) = Ln\left(e^{-\lambda T_{1/2}}\right) \longrightarrow Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \cdot T_{1/2} \longrightarrow -Ln(2) = -\lambda \cdot T_{1/2}$$

$$-Ln(2) = -\lambda \cdot T_{1/2} \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{Ln(2)}{T_{1/2}}}$$

Expreso el período de semidesintegración en segundos:

$$T_{1/2} = 1925\ días * \frac{86400\ s}{1\ día} = 166320000\ s$$

Y sustituyo en la fórmula deducida anteriormente:

$$\boxed{\lambda = \frac{Ln(2)}{166320000} = 4'1676 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}}$$

El valor de la constante de desintegración es $4'1676 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}$

La actividad de una muestra nos indica el número de desintegraciones por segundo.

Por ello podemos expresarla como : $\boxed{A = \lambda \cdot N}$

Debo calcular el número de núcleos radiactivos que hay en la muestra de 100 gramos.

$$100\ g\ {}^{60}Co \cdot \frac{1\ mol\ {}^{60}Co}{60\ g\ {}^{60}Co} \cdot \frac{6 \cdot 10^{23}\ núcleos\ {}^{60}Co}{1\ mol\ {}^{60}Co} = 1 \cdot 10^{24}\ núcleos\ de\ {}^{60}Co$$

La actividad inicial será: $A_0 = \lambda \cdot N_0 \longrightarrow A_0 = 4'1676 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{24} = 4'1676 \cdot 10^{15}\ Bq$

La actividad inicial de la muestra de 100 gramos será de $4'1676 \cdot 10^{15}\ Bq$.

a) Calcula el valor de la constante de desintegración radiactiva y de la actividad inicial de la muestra.

Partiremos de la ecuación que relaciona la actividad con el tiempo:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \xrightarrow{A = \frac{A_0}{3}} \frac{A_0}{3} = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \longrightarrow \frac{1}{3} = e^{-\lambda t}$$

$$Ln\left(\frac{1}{3}\right) = Ln\left(e^{-\lambda t}\right) \longrightarrow Ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\lambda \cdot t \longrightarrow -Ln(3) = -\lambda \cdot t \longrightarrow \boxed{t = \frac{Ln(3)}{\lambda}}$$

Sustituyendo:

$$t = \frac{Ln(3)}{4'1676 \cdot 10^{-9}} = 2'63608 \cdot 10^{8}\ s$$

Transformo los segundos en años:

$$2'63608 \cdot 10^{8}\ s \cdot \frac{1\ dia}{86400\ s} \cdot \frac{1\ año}{365\ días} = 8'36\ años$$

La vida útil de la muestra será de 8’36 años.

b) Si hay que reemplazar la muestra cuando la actividad ha descendido a un tercio de la actividad inicial, ¿cuál es la vida útil en años de una muestra destinada a este uso?

BONUS

Deducción de la ecuación de desintegración radiactiva.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

La variación del número de núcleos radiactivos con el tiempo es proporcional al número de núcleos radiactivos. Es negativa porque el número de núcleos disminuye con el tiempo.

La ecuación que hemos escrito arriba, es una ecuación diferencial. Para poder resolverla, debemos integrarla.

Condiciones iniciales: $t = 0; \;\; N = N_0$

Separo las variables: $dN = -\lambda \cdot N\, dt \longrightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$

Ahora ya podemos integrar, definiendo los límites de integración con las condiciones iniciales.

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda\, dt \longrightarrow [Ln(N)]_{N_0}^{N} = -\lambda \cdot [t]_0^t \longrightarrow Ln(N) - Ln(N_0) = -\,\lambda \cdot (t-0)$$

$$Ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t \longrightarrow \left(\frac{N}{N_0}\right) = e^{-\lambda \cdot t} \longrightarrow \boxed{N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

Que es la ley que queríamos obtener.