



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 3 · CON CALCULADORA
ANÁLISIS

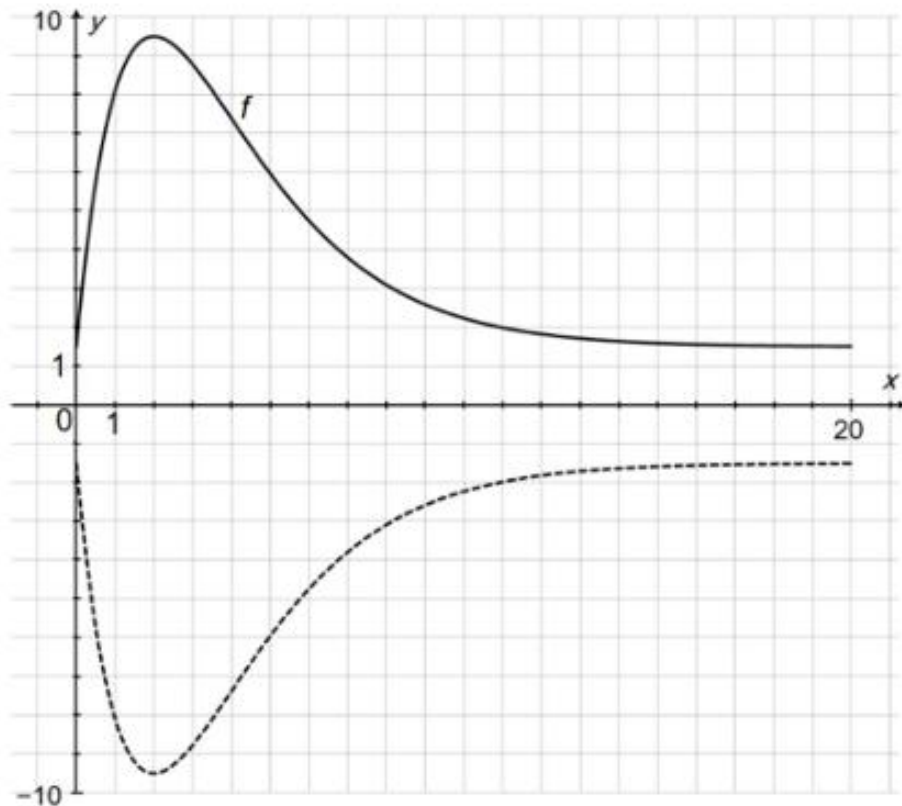
JUNIO 2024



Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{kx+1} + \frac{3}{2}$; $k \in \mathcal{R}$

La silueta de un decantador de vino se puede modelar por un sólido de revolución obtenido rotando el gráfico de f alrededor del eje X , entre las rectas $x = 0$ y $x = 20$, como se muestra en la figura de abajo.



Decantador de vino

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{kx+1} + \frac{3}{2}$; $k \in \mathcal{R}$

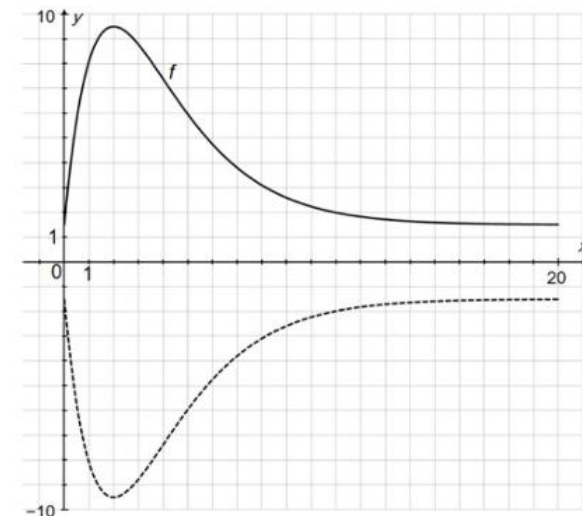
a) Sabiendo que $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 2$ tal como se muestra en la representación gráfica, determina el valor de k .

Solución: Dado que $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 2$ $f'(2) = 0$

Se calcula $f'(x)$: $f'(x) = 4 \cdot e^{kx+1} + 4x \cdot k \cdot e^{kx+1} = 4 \cdot e^{kx+1} \cdot (1 + k \cdot x)$

$$f'(2) = 0 \longrightarrow f'(2) = 4 \cdot e^{k \cdot 2 + 1} \cdot (1 + k \cdot 2) = 0 \longrightarrow f'(2) = 1 + 2k = 0 \longrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

El valor pedido es: $k = -1/2$.



Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

Para el resto del ejercicio puedes considerar que $k = -1/2$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 4$. Da el resultado en forma: $y = ax + b$.

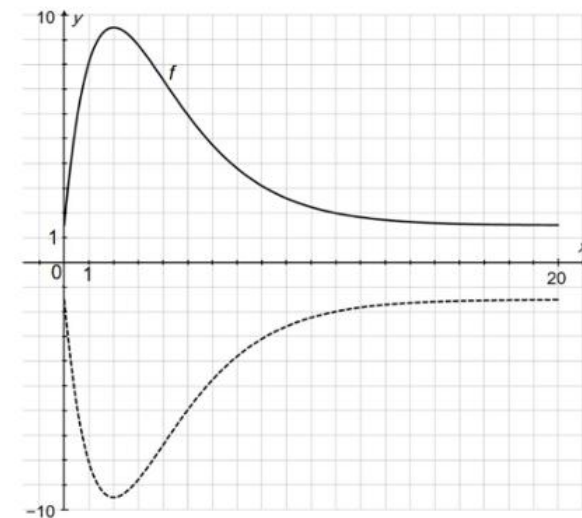
Calculo la imagen de $f(x)$ en $x = 4$ $f(4) = 4 \cdot 4 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 4 + 1} + \frac{3}{2} = 16 \cdot e^{-1} + \frac{3}{2}$

Calculo la pendiente de la recta tangente en $x = 4$ $f'(4) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 4 + 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4\right) = -4 \cdot e^{-1}$

Se escribe la ecuación de la recta tangente. $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4)$

$$y - \left(16 \cdot e^{-1} + \frac{3}{2}\right) = -4 \cdot e^{-1} \cdot (x - 4) \rightarrow y - 16 \cdot e^{-1} - \frac{3}{2} = -4 \cdot e^{-1} \cdot x + 16 \cdot e^{-1}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -4 \cdot e^{-1} \cdot x + 32 \cdot e^{-1} + \frac{3}{2}$



$$f'(x) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x\right)$$

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

Para el resto del ejercicio puedes considerar que $k = -1/2$.

c) Demuestra que el gráfico de f tiene un punto de inflexión y calcula sus coordenadas.

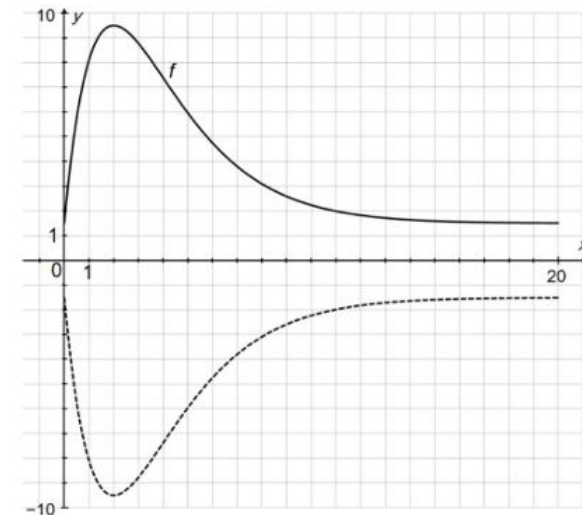
Solución: Se calcula la segunda derivada de $f(x)$.

$$f''(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x\right) + 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x + 1\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \cdot x\right) = (x - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1}$$

$$\text{Se resuelve } f''(x) = 0 \longrightarrow (x - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \\ e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Se hace un estudio de signos de $f''(x)$ para comprobar que en $x = 4$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión.



$$f'(x) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x\right)$$

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

Para el resto del ejercicio puedes considerar que $k = -1/2$.

c) Demuestra que el gráfico de f tiene un punto de inflexión y calcula sus coordenadas.

Solución: $f''(x) = (x - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1}$

Es importante tener en cuenta para el estudio de signos que el factor exponencial es siempre positivo. En el contexto de la gráfica que nos presentan, debemos tener en cuenta que $x > 0$.

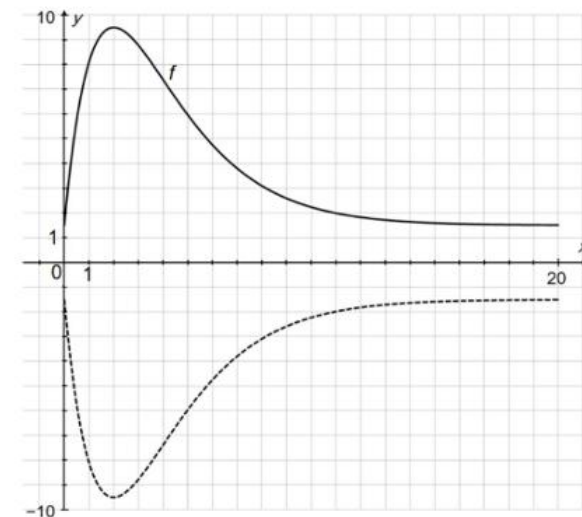
	0	4	$+\infty$
$f''(x)$	—	+	
$f(x)$			

Se observa que la función presenta un punto de inflexión en $x = 4$ ya que hay un cambio en la curvatura. Las coordenadas se calculan sustituyendo $x = 4$ en la función.

$$f(4) = 4 \cdot 4 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 4 + 1} + \frac{3}{2} = 16 \cdot e^{-1} + \frac{3}{2}$$

Las coordenadas del punto de inflexión son: $I = \left(4, 16 \cdot e^{-1} + \frac{3}{2} \right)$

©Angel Cuesta Arza



Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

d) Determina el volumen del decantador. Da tu respuesta en litros.

Solución: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

Se calcula el volumen de revolución con la fórmula del Booklet y se calculará la integral con la calculadora, puesto que hacerla paso a paso es largo (y se permite el uso de la calculadora). Los límites de integración los marcan las dimensiones del decantador. Desde $x = 0$ a $x = 20$.

$$V = \pi \cdot \int_0^{20} (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^{20} \left(4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2} \right)^2 dx = 1293,9 \text{ cm}^3 \approx 1,29 \text{ L}$$

1. Calculation

2. Toolbox

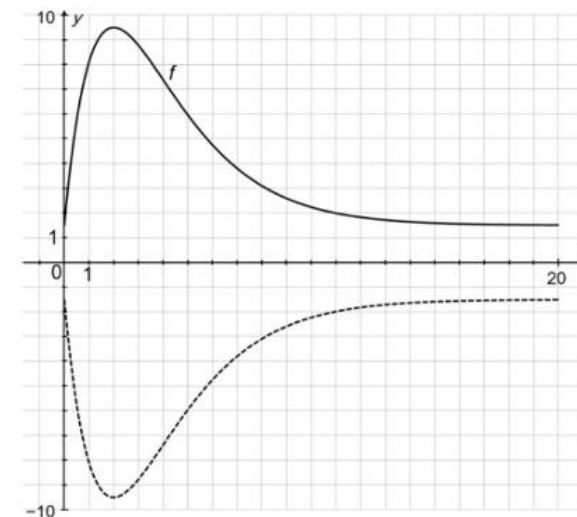
3. Calculus

4. Integral definida

$$\int_0^{20} \pi \cdot \left(4 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2} \right)^2 dx$$

1293.902806

El volumen del decantador es **1,29 L**.

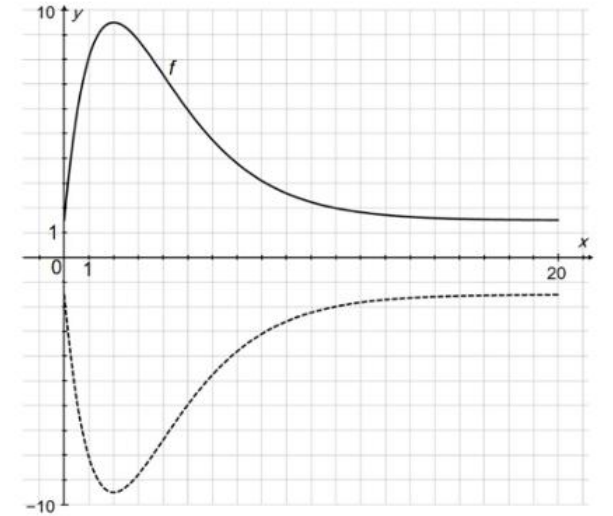


Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por: $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{3}{2}$

e) Indica algún punto débil del modelo comparándolo con la foto.

Solución:



El decantador de la foto se ensancha hacia la parte superior, mientras que la función es decreciente en el tramo final.

Decantador de vino