



EUROPEAN BACCALAUREATE ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS 5 PERIODOS

EJERCICIO 1 · CON CALCULADORA
NÚMEROS COMPLEJOS
Y SUCESIONES



JUNIO 2024



Ejercicio 1. Sucesiones y números complejos

Considerar la sucesión (u_n) que viene dada por

$$\begin{cases} z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ z_{n+1} = z_n^2, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

a) Escribe z_0, z_1, z_2, z_3 en forma $r \cdot e^{i\theta}$ y represéntalos en el plano complejo.

Solución: En primer lugar, expreso z_0 en la forma pedida a partir del enunciado. $z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$

Se observa que el módulo es 1 y que el argumento es $2\pi/7$. $z_0 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{7}}$

Se aplica la fórmula de la sucesión para calcular el resto de los términos pedidos.

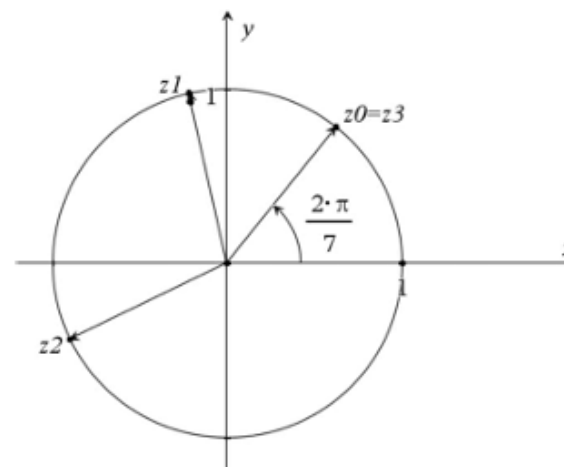
$$z_1 = (z_0)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{7}}$$

$$z_2 = (z_1)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{7}}$$

$$z_3 = (z_2)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{16\pi}{7}}$$

Observa que $z_0 = z_3$ ya que $16\pi/7 = 2\pi + 2\pi/7$.

Se representan en el plano complejo los valores obtenidos.



Ejercicio 1. Sucesiones y números complejos

Considerar la sucesión (u_n) que viene dada por

$$\begin{cases} z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ z_{n+1} = z_n^2, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

b) Determine para que valores de n se cumple que: $z_n = z_0$

Solución: La igualdad se verificará siempre y cuando los argumentos sean equivalentes. $\arg(z_n) \equiv \arg(z_0)$

Podemos deducir que:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= (z_0)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{7}} \\ z_2 &= (z_1)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{7}} \\ z_3 &= (z_2)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{7}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{16\pi}{7}} \end{aligned} \right\} \arg(z_n) = \frac{2^{n+1} \cdot \pi}{7}, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Los argumentos serán equivalentes si: $\frac{2^{n+1} \cdot \pi}{7} = 2\pi k + \frac{2\pi}{7}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \longrightarrow \frac{2 \cdot 2^n}{7} = 2k + \frac{2}{7}$

$$\frac{2^n}{7} = k + \frac{1}{7} \longrightarrow 2^n = 7k + 1$$

Para poder resolver esta ecuación hacen falta **conocimientos de congruencias**. Buscaremos otra forma de resolverla.

Ejercicio 1. Sucesiones y números complejos

Considerar la sucesión (u_n) que viene dada por

$$\begin{cases} z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ z_{n+1} = z_n^2, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

b) Determine para que valores de n se cumple que: $z_n = z_0$

$2^n = 7k + 1$ En vez de usar notación de congruencias, basta con mirar el resto que deja 2^n al dividirlo entre 7:

n	2^n	División entre 7	Resto
0	1	0	1
1	2	0	2
2	4	0	4
3	8	1	1
4	16	2	2
5	32	4	4
6	64	9	1

Observa el patrón de la tabla, cada tres pasos, reaparece el resto 1, de modo que:

2^n “deja resto 1 al dividir por 7” $\Leftrightarrow n = 0, 3, 6, 9, \dots$

Si $n = 0 \rightarrow 2^0 = 7 \cdot 0 + 1$

Si $n = 3 \rightarrow 2^3 = 7 \cdot 1 + 1$

Si $n = 6 \rightarrow 2^6 = 7 \cdot 9 + 1$

Solución: $z_n = z_0$ si $n = 0, 3, 6, 9, \dots$

Ejercicio 1. Sucesiones y números complejos

Considerar la sucesión (w_n) que viene dada por
$$\begin{cases} w_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right), \text{ donde } k \text{ es entero y } k > 1 \\ w_{n+1} = w_n^2, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

c) Determina los valores de k tales que w_3 sea el número complejo conjugado de w_0 .

Solución: Utilizando un razonamiento similar al del apartado a) podemos deducir que: $w_0 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{k}}$

$$w_1 = (w_0)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{k}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{k}}$$

Podemos calcular w_3 :

$$w_2 = (w_1)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{k}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{k}}$$

$$w_3 = (w_2)^2 = \left(1 \cdot e^{i \cdot \frac{8\pi}{k}}\right)^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{16\pi}{k}}$$

Se calcula el conjugado de w_0 .

$$\overline{w_0} = \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right) = 1 \cdot e^{-i \cdot \frac{2\pi}{k}}$$

Ejercicio 1. Sucesiones y números complejos

Considerar la sucesión (w_n) que viene dada por
$$\begin{cases} w_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right), \text{ donde } k \text{ es entero y } k > 1 \\ w_{n+1} = w_n^2, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

c) Determina los valores de k tales que w_3 sea el número complejo conjugado de w_0 .

La igualdad se verificará siempre y cuando los argumentos sean equivalentes. $\arg(w_3) \equiv \arg(\overline{w_0})$

Los argumentos serán equivalentes si:
$$\frac{16 \cdot \pi}{k} = 2\pi j - \frac{2\pi}{k} \cdot j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \longrightarrow \frac{16}{k} = 2j - \frac{2}{k}$$

$$16 = 2 \cdot k \cdot j - 2 \longrightarrow 8 = k \cdot j - 1 \longrightarrow k \cdot j = 9$$

Puesto que j y k son números enteros y positivos, las únicas soluciones son (se obtienen por tanteo):

$k = 1; j = 9$ Solución no válida, puesto que $k > 1$
 $k = 3; j = 3$
 $k = 9; j = 1$

Solución: $w_3 = \overline{w_0}$ si $k = 3$ o $k = 9$