



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 8 · SIN CALCULADORA
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO



JUNIO 2024



Ejercicio 8. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional, considera:

La recta d_1 que pasa por $A(2,1,-2)$ con vector director $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, la recta d_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathfrak{R}$ y el punto $B(1,8,-2)$

a) Demuestra que B pertenece a d_2 .

Solución:

Se sustituye el punto B en la ecuación de la recta d_2 y se comprueba si en las 3 ecuaciones el valor del parámetro es el mismo. Si ocurre así, el punto pertenece a la recta. En caso contrario, no pertenece a la recta.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathfrak{R} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t \\ -13+7t \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4-t=1 \\ -13+7t=8 \\ -2=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=3 \\ -2=-2 \end{cases}$$

Como las 3 igualdades son coherentes, podemos afirmar que **B pertenece a d_2** .

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional, considera:

La recta d_1 que pasa por $A(2,1,-2)$ con vector director $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, la recta d_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathfrak{R}$ y el punto $B(1,8,-2)$

b) Demuestra que d_1 y d_2 son secantes y forman un ángulo de 60° . Calcula el punto de intersección entre las rectas.

Solución:

Se estudia en primer lugar si los vectores directores de las rectas d_1 y d_2 son paralelos o no. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

A simple vista se observa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales. $\frac{-1}{-4} \neq \frac{7}{3} \neq \frac{0}{-5}$

Por lo tanto, las rectas son secantes o se cruzan. Para comprobar que se cortan y calcular de forma simultánea el punto de corte, lo más rápido es igualar las coordenadas de ambas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathfrak{R}$$

Continúa en la siguiente diapositiva.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

b) Demuestra que d_1 y d_2 son secantes y forman un ángulo de 60° . Calcula el punto de intersección entre las rectas.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathfrak{R} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 - 4s \\ 1 + 3s \\ -2 - 5s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t \\ -13 + 7t \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 - 4s = 4 - t \\ 1 + 3s = -13 + 7t \\ -2 - 5s = -2 \end{cases}$$

Se despeja el valor de s de la tercera ecuación y se sustituye en las otras dos ecuaciones. Debemos obtener el mismo valor de t en ambas para que ambas rectas se corten.

$$-2 - 5s = -2 \rightarrow -5s = 0 \rightarrow s = 0 \rightarrow \begin{cases} 2 - 4 \cdot 0 = 4 - t \\ 1 + 3 \cdot 0 = -13 + 7t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, ambas rectas se cortan. El punto de intersección se obtiene sustituyendo el parámetro correspondiente.

$$s = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El punto de corte entre las rectas d_1 y d_2 es $A(2, 1, -2)$.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

b) Demuestra que d_1 y d_2 son secantes y **forman un ángulo de 60°** . Calcula el punto de intersección entre las rectas.

Se calcula el ángulo que forman las dos rectas.

Recordamos que disponemos de los vectores directores. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Utilizamos la fórmula correspondiente, **OJO, nos la proporcionan en el examen.**
Pero nosotros debemos despejarla y poner el valor absoluto del producto escalar.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\widehat{BAC})$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 0^2}} = \frac{|(-4) \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + (-5) \cdot 0|}{\sqrt{16 + 9 + 25} \cdot \sqrt{1 + 49 + 0}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|25|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Tal como dice el enunciado, **las rectas forman un ángulo de 60°** .

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional, considera:

La recta d_1 que pasa por $A(2,1,-2)$ con vector director $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, la recta d_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ y el punto $B(1,8,-2)$

c) Determina la ecuación cartesiana del plano que contiene las rectas d_1 y d_2 .

Solución:

Se calcula la ecuación del plano a partir del punto $A(2,1,-2)$ y de los vectores directores de las rectas d_1 y d_2 .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula el vector normal del plano mediante el producto vectorial. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - (-5) \cdot 7 \\ -5 \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 \\ -4 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

NOTA: Puedes hacer el producto vectorial utilizando determinantes. No es obligatorio usar la fórmula del Booklet.

La ecuación del plano sería: $7x + y - 5z + D = 0$

Se termina el apartado en la siguiente diapositiva.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional, considera:

La recta d_1 que pasa por $A(2,1,-2)$ con vector director $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, la recta d_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathfrak{R}$ y el punto $B(1,8,-2)$

c) Determina la ecuación cartesiana del plano que contiene las rectas d_1 y d_2 .

Solución:

Se calcula la ecuación del plano a partir del punto $A(2,1,-2)$ y de su ecuación $7x + y - 5z + D = 0$.

Se sustituye el punto $A(2,1,-2)$ en la ecuación $7x + y - 5z + D = 0$.

$$7 \cdot 2 + 1 - 5 \cdot (-2) + D = 0 \rightarrow D = -25$$

La ecuación cartesiana del plano que contiene las rectas d_1 y d_2 es $\pi: 7x + y - 5z - 25 = 0$.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

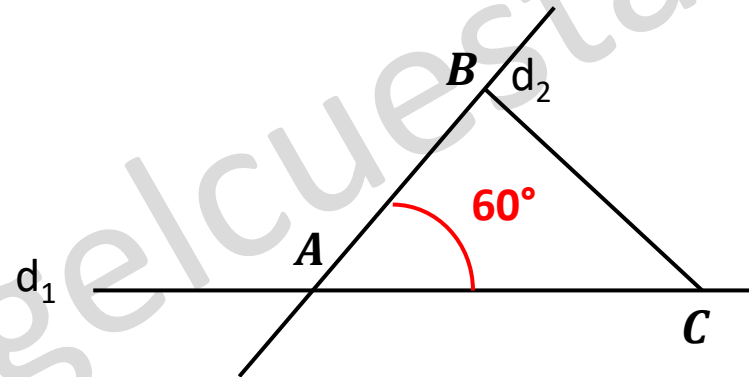
En un espacio tridimensional, considera:

La recta d_1 que pasa por $A(2,1,-2)$ con vector director $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, la recta $d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ y el punto $B(1,8,-2)$

d) Determina las coordenadas del punto C perteneciente a d_1 tal que el triángulo ABC es un triángulo equilátero.

Solución:

Se muestra un esquema de la situación.



El punto C tendrá por coordenadas (en función del parámetro): $C(2 - 4s, 1 + 3s, -2 - 5s)$

Al ser el triángulo equilátero, $d_{AB} = d_{AC} = d_{BC}$. Utilizaré la primera igualdad.

$$\sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 8)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{(2 - 4s - 2)^2 + (1 + 3s - 1)^2 + (-2 - 5s - (-2))^2}$$

$$\sqrt{1 + 49 + 0} = \sqrt{16s^2 + 9s^2 + 25s^2} \rightarrow \sqrt{50} = \sqrt{50s^2} \rightarrow \sqrt{50} = \sqrt{50} \cdot |s| \rightarrow s = \pm 1$$

Ejercicio 8. Geometría en el espacio

d) Determina las coordenadas del punto C perteneciente a d_1 tal que el triángulo ABC es un triángulo equilátero.

Se obtienen las coordenadas del punto $C(2 - 4s, 1 + 3s, -2 - 5s)$

Si $s = 1 \rightarrow C(-2, 4, -7)$ Si $s = -1 \rightarrow C(6, -2, 3)$

Se comprueba la validez de las soluciones. Primero $C(-2, 4, -7)$

A continuación, compraré para ambos puntos si se cumple, $d_{AB} = d_{AC} = d_{BC}$. $A(2, 1, -2)$ $B(1, 8, -2)$ $C(-2, 4, -7)$

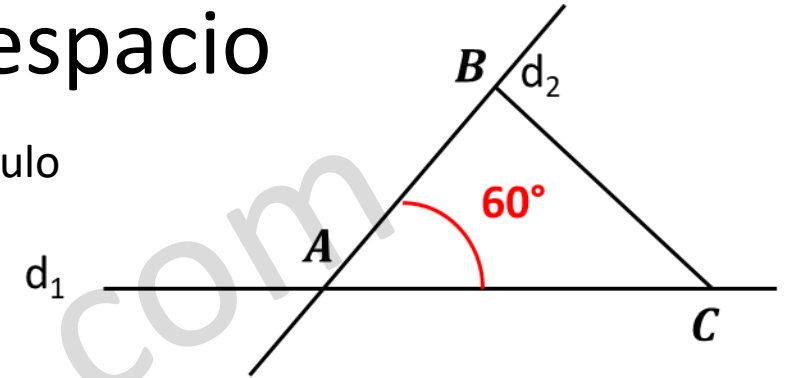
$$d_{AB} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 8)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 4)^2 + (-2 - (-7))^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (8 - 4)^2 + (-2 - (-7))^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

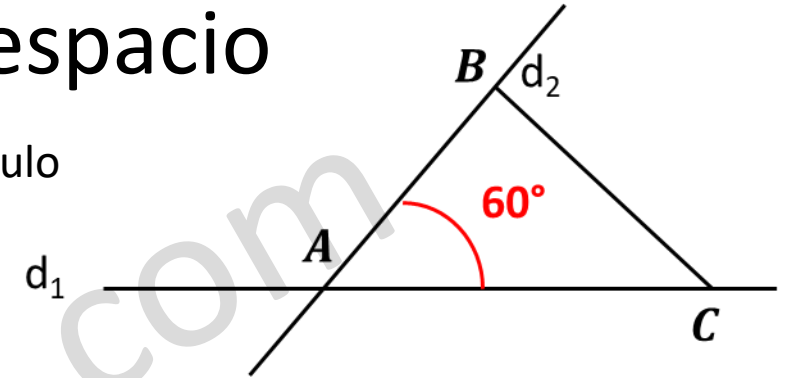
El punto buscado es: $C(-2, 4, -7)$

En la siguiente diapositiva se comprueba si $C(6, -2, 3)$ es solución válida.



Ejercicio 8. Geometría en el espacio

d) Determina las coordenadas del punto C perteneciente a d_1 tal que el triángulo ABC es un triángulo equilátero.



A continuación, compraré para ambos puntos si se cumple, $d_{AB} = d_{AC} = d_{BC}$. $A(2, 1, -2)$ $B(1, 8, -2)$ $C(6, -2, 3)$

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 8)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (1 - (-2))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (8 - (-2))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{25 + 100 + 25} = \sqrt{150}$$

El punto $C(6, -2, 3)$ NO es solución válida porque el triángulo que forma con A y B no es equilátero. Es isósceles.