



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 5 · SIN CALCULADORA
NÚMEROS COMPLEJOS

JUNIO 2024



Ejercicio 5. Números complejos

Calcula: $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^9$

Escribe tu respuesta en forma $x + yi$, donde x e y son números reales.

Solución: Se expresan ambos números complejos en forma exponencial. Para ello calculo su módulo y su argumento.

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha_1 = \arctg(\sqrt{3}) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ \alpha_1 = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

z_1 se encuentra en el primer cuadrante.

$$z_2 = 1 - i \quad r_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow \alpha_2 = \arctg(-1) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \\ \alpha_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

z_2 se encuentra en el cuarto cuadrante.

Siendo: $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i} \quad z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-\pi}{4} \cdot i}$

Ejercicio 5. Números complejos

Calcula: $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^9$ Siendo: $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}$ $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-\pi}{4} \cdot i}$

Escribe tu respuesta en forma $x + yi$, donde x e y son números reales.

Solución: Se expresa la operación en forma exponencial.

$$z = \left(\frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{-\pi}{4} \cdot i}} \right)^9 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i + \frac{\pi}{4} \cdot i} \right)^9 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{7\pi}{12} \cdot i} \right)^9 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{12} \cdot i} \right)^9 = (\sqrt{2})^9 \cdot e^{\frac{7\pi}{12} \cdot i \cdot 9} = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{21\pi}{4} \cdot i}$$

$$z = \left(\frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{-\pi}{4} \cdot i}} \right)^9 = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{4\pi + \frac{5\pi}{4} \cdot i} = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4} \cdot i}$$

Se expresa de forma binomial: $z = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$z = -16 - 16i$