



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 4 · SIN CALCULADORA
OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

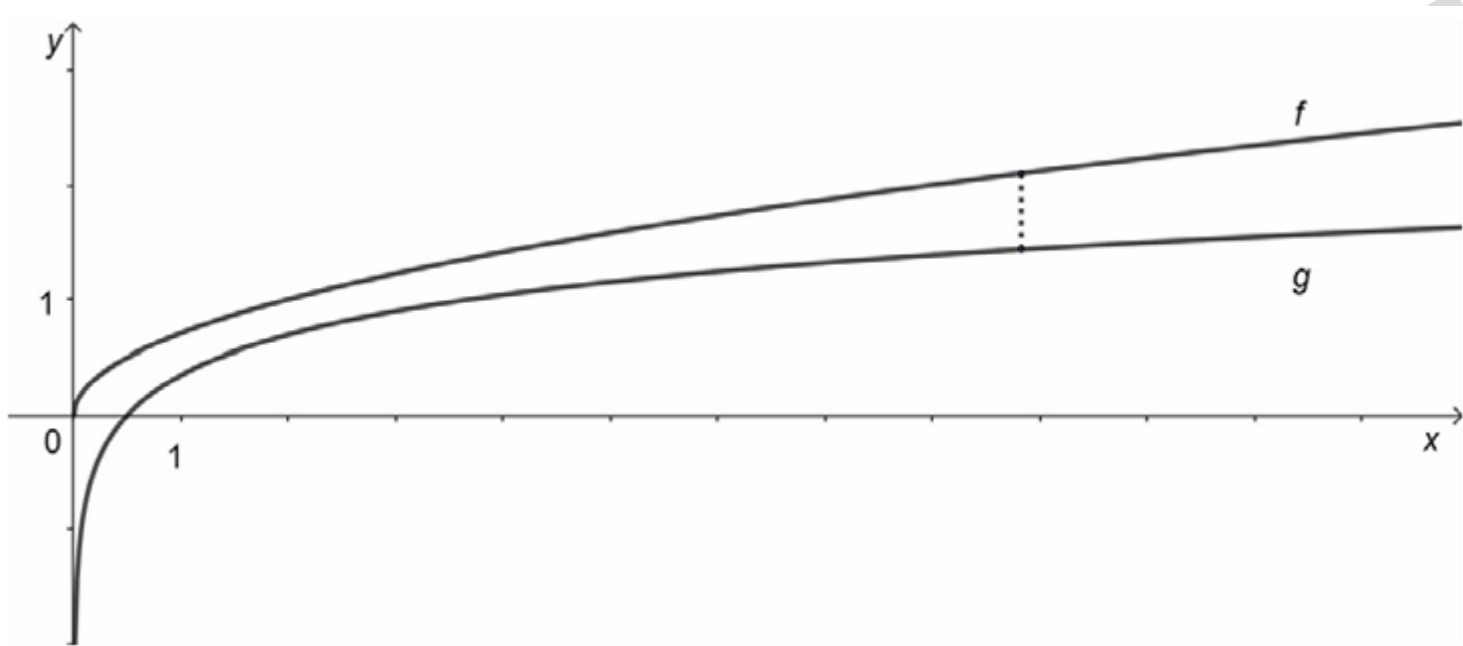
JUNIO 2024



Ejercicio 4. Optimización de funciones

Considera las funciones f y g definidas para $x > 0$ por: $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln x$

La figura muestra los gráficos de f y g y una línea de puntos vertical desde un punto de un gráfico de f a un punto del gráfico de g .



Determina la mínima distancia entre ambas gráficas.

Ejercicio 4. Optimización de funciones

Se define un punto cualquiera de f y otro de g , teniendo en cuenta que comparten la coordenada x , ya que deben estar en la vertical.

$$A = (x, \sqrt{x}) \quad B = (x, \ln x)$$

Se calcula la distancia entre los puntos A y B en función de x .

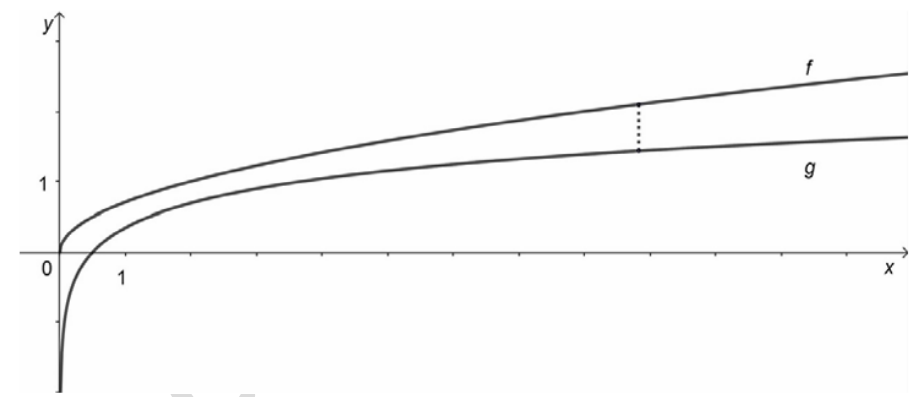
$$f(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (\sqrt{x} - \ln x)^2} = |\sqrt{x} - \ln x| = \sqrt{x} - \ln x \quad \text{Ya que } \sqrt{x} > \ln x \quad \forall x > 0$$

Se calcula el mínimo de $f(x)$. Para ello se obtiene el valor de la derivada. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

Se iguala la función derivada a cero y se resuelve la ecuación:

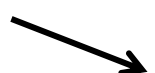
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \rightarrow x = 2\sqrt{x} \rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Se descarta $x = 0$, ya que $g(x)$ no está definida para ese valor de x .



Ejercicio 4. Optimización de funciones

Podemos comprobar que en $x = 4$ se alcanza la mínima distancia de dos formas diferentes. Bien mediante un estudio de signos de la derivada, bien, mediante el cálculo de la segunda derivada. Con fines pedagógicos, se hará de las dos formas.

	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18} > 0$$

Se observa que la función presenta un mínimo relativo en $x = 4$ ya que decrece antes de ese valor y crece después.

Vamos a llegar a la misma conclusión mediante el criterio de la segunda derivada. Calculo la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot 2\sqrt{x} - 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

Se sustituye en la segunda derivada $x = 4$.
$$f''(4) = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}} + \frac{1}{4^2} = \frac{3}{32} > 0$$

Se observa que la función presenta un mínimo relativo en $x = 4$ ya su segunda derivada es positiva.

Ejercicio 4. Optimización de funciones

Se calcula la distancia mínima sustituyendo $x = 4$ en la función $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

$$f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4 = 2 - 2 \cdot \ln 2$$

El valor de la mínima distancia entre las funciones es **$2 - 2 \cdot \ln 2$ unidades de longitud.**