



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

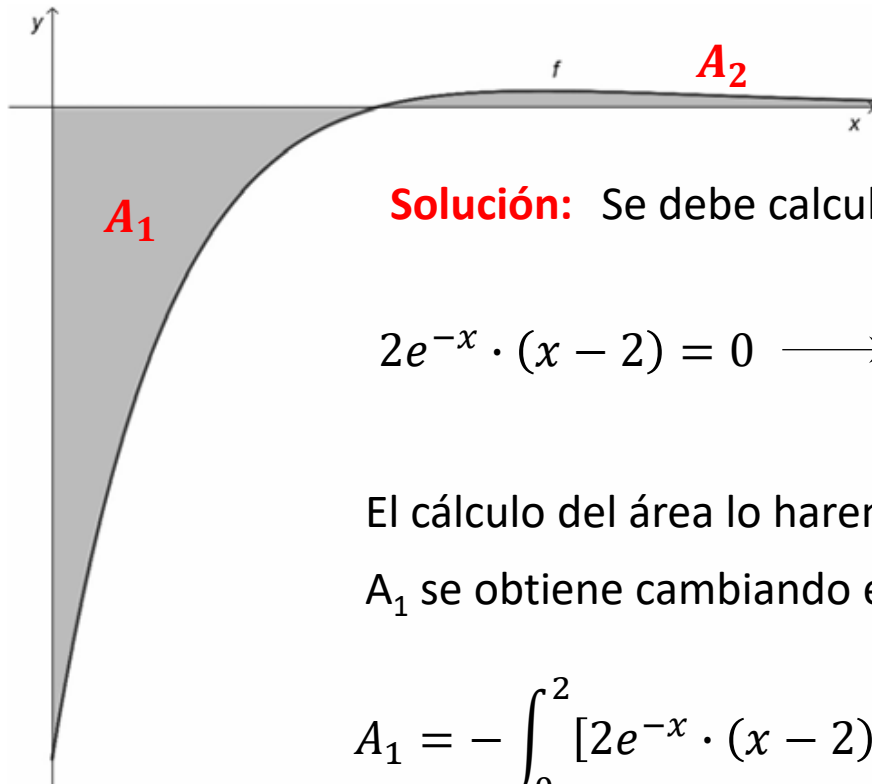
EJERCICIO 3 · SIN CALCULADORA
INTEGRAL DEFINIDA IMPROPIA

JUNIO 2024



Ejercicio 3. Integral definida impropia

Considera la función definida por $f(x) = 2e^{-x} \cdot (x - 2), x \geq 0$ La figura de abajo muestra su gráfica.



Determina el área comprendida entre su gráfica y el eje X para $x \geq 0$.

Solución: Se debe calcular, en primer lugar, el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

$$2e^{-x} \cdot (x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2e^{-x} = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{La función exponencial no se anula nunca} \\ x = 2 \end{cases}$$

El cálculo del área lo haremos mediante dos integrales. Calculo dos áreas A_1 y A_2 y las sumo.

A_1 se obtiene cambiando el signo del resultado de la integral por ser $f(x) \leq 0$ si $x \in [0, 2]$

$$A_1 = - \int_0^2 [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx$$

$$A_2 = \int_2^{+\infty} [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx$$

Ejercicio 3. Integral definida impropia

$$F(x) = \int [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx$$

Se calcula la función primitiva de $f(x)$. Se debe emplear el método de integración por partes. Se muestra la fórmula del Booklet que os proporcionan.

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Se definen u' y v , y se calculan u y v' .

$$\left\{ \begin{array}{ll} v = x - 2 & \xrightarrow{\text{Derivo}} v' = 1 \\ u' = 2e^{-x} dx & \xrightarrow{\text{Integro}} u = \int 2e^{-x} dx = -2e^{-x} \end{array} \right.$$

$$F(x) = (-2e^{-x})(x - 2) - \int (-2e^{-x}) dx = (-2e^{-x})(x - 2) - 2e^{-x} = -2e^{-x}(x - 2 + 1) = -2e^{-x}(x - 1) + C$$

Se calcula el área entre 0 y 2.

$$F(2) = -2e^{-2}(2 - 1) = -2e^{-2} \quad F(0) = -2e^{-0}(0 - 1) = 2$$

$$A_1 = - \int_0^2 [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx = -(F(2) - F(0)) = -(-2e^{-2} - 2) = 2 + 2e^{-2} = 2 + \frac{2}{e^2}$$

Ejercicio 3. Integral definida impropia

Se calcula el área entre 2 e infinito. Es una integral impropia, por eso debemos utilizar límites. $F(x) = -2e^{-x}(x - 1) + C$

$$A_2 = \int_2^{+\infty} [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t [2e^{-x} \cdot (x - 2)] dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(2) = 0 - (-2e^{-2}) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

$$F(2) = -2e^{-2}(2 - 1) = -2e^{-2} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} -2e^{-t}(t - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(t - 1)}{e^t} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0$$

Ya que el **orden del infinito** del denominador es mayor que el del numerador.

Por último, se suman ambas áreas:

$$A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} = 2 + \frac{4}{e^2} \text{ unidades de área}$$

El área pedida es: $2 + \frac{4}{e^2}$ unidades de área