



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

PARTE B · CON CALCULADORA

JUNIO 2023



Observaciones

Para la realización de este examen se permite la utilización de un formulario. He tratado de adaptar los ejercicios de geometría a dicho formulario.

Las fórmulas del resto de temas también se han utilizado a partir del formulario, aunque no se indique explícitamente.

La duración del examen es de 2 horas y se permite el uso de calculadora.

Salvo indicación contraria, no se dará la puntuación máxima a una respuesta correcta que no vaya acompañada de los razonamientos o explicaciones que permiten llegar a dicha solución.



VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Optimización de funciones



Exámenes de años anteriores
en español



Geometría en el espacio.



Exámenes de años anteriores
en inglés.



Geometría. Distancias y ángulos.



PREGUNTA B1

Considerar los números complejos $z = \sqrt{2} - i$ y $w = 1 - i\sqrt{2}$

a) La sucesión (u_n) viene dada por $(u_n) = (z \cdot w)^{4n}$, $n \geq 1$

Calcular u_1, u_2 y u_3

Se multiplican los complejos en forma binómica:

$$z \cdot w = (\sqrt{2} - i) \cdot (1 - i\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2i - i + \sqrt{2} \cdot i^2 = 3i$$

Calculo los valores pedidos:

$$u_1 = (3i)^4 = 3^4 \cdot i^4 = \mathbf{81} \quad u_2 = (3i)^8 = 3^8 \cdot i^8 = \mathbf{6561} \quad u_3 = (3i)^{12} = 3^{12} \cdot i^{12} = \mathbf{531\,441}$$

b) Mostrar que (u_n) es una sucesión geométrica y escribir u_n en la forma $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

La progresión es geométrica porque se verifica que:

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3i)^{4 \cdot (n+1)}}{(3i)^{4n}} = \frac{(3i)^{4n+4}}{(3i)^{4n}} = (3i)^4 = 3^4 \cdot i^4 = 81$$

Se calcula la expresión pedida:

$$u_n = (3i)^{4n} = 3^{4n} \cdot i^{4n} = (3^4)^n \cdot (i^4)^n = 81^n = 81 \cdot 81^{n-1}$$

La ecuación que define la sucesión geométrica es: $u_n = \mathbf{81 \cdot 81^{n-1}}$

PREGUNTA B2

Considerar la familia de funciones f_a dada por $f_a = 2x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$, donde $a > 0$

La siguiente figura muestra los gráficos de las funciones f_1, f_2 y f_3

a) Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de f_1 y el eje x para $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 (2x^2 \cdot e^{-x}) dx = \frac{2 \cdot (2e - 5)}{e} \text{ unidades de área}$$

Se hace el cálculo con la calculadora.

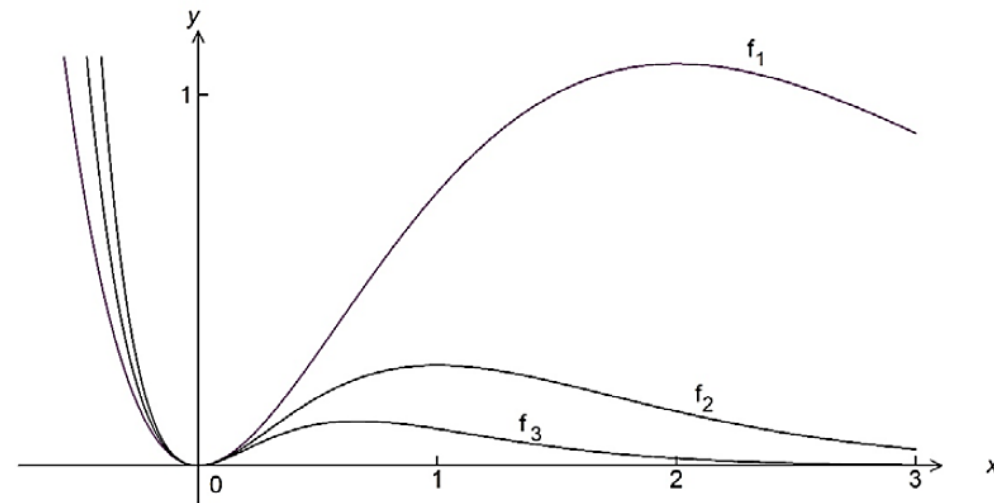
b) Calcular el valor de a tal que el punto $P = (1,1)$ se encuentra en el gráfico de f_a .

Se sustituye en la función $x = 1$ y se iguala su valor a 1. Se despeja a de la ecuación obtenida.

$$f_a(1) = 2 \cdot 1^2 \cdot e^{-a \cdot 1} = 1 \longrightarrow 2 \cdot e^{-a} = 1 \longrightarrow e^{-a} = \frac{1}{2} \longrightarrow -a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow a = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

El valor de a es: **$a = \ln(2)$**

Esta ecuación se podría resolver con la calculadora.

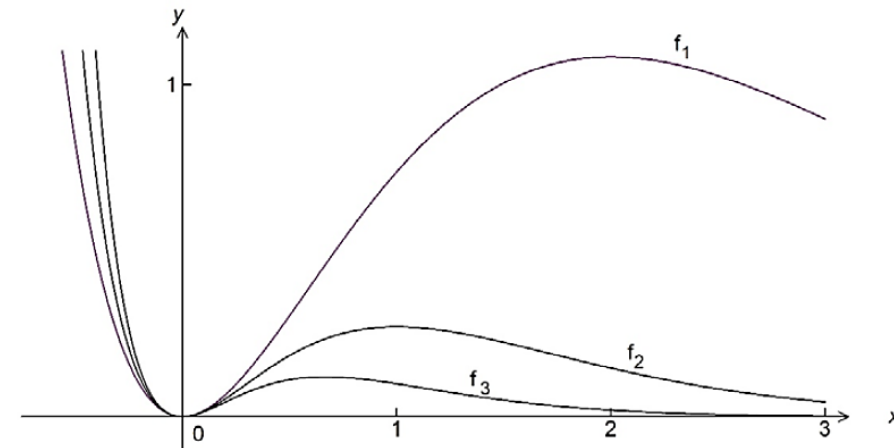


PREGUNTA B2

En c) y d), hacer uso de

$$f'_a(x) = (4x - 2a \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x},$$

$$f''_a(x) = (4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x}.$$



c) Determinar las coordenadas de los extremos de f_a y especificar la naturaleza de cada uno.

Se iguala la función derivada a cero para obtener los valores de los extremos relativos.

$$f'_a(x) = (4x - 2a \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4x - 2a \cdot x^2 = 0 \longrightarrow x \cdot (4 - 2a \cdot x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{a} \\ x = 0 \end{cases} \\ e^{-a \cdot x} = 0 \longrightarrow \text{No existe solución real} \end{cases}$$

Observando la gráfica dada se puede comprobar que en $x = 0$ hay un mínimo relativo, y que en $x = 2/a$ hay un máximo relativo, pero con fines pedagógicos, se va a demostrar utilizando el criterio de la segunda derivada.

Se sustituyen ambos valores en la segunda derivada.

$$f''_a(0) = (4 - 8 \cdot a \cdot 0 + 2 \cdot a^2 \cdot 0^2) \cdot e^{-a \cdot 0} = 4 > 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ hay un } \mathbf{mínimo relativo}$$

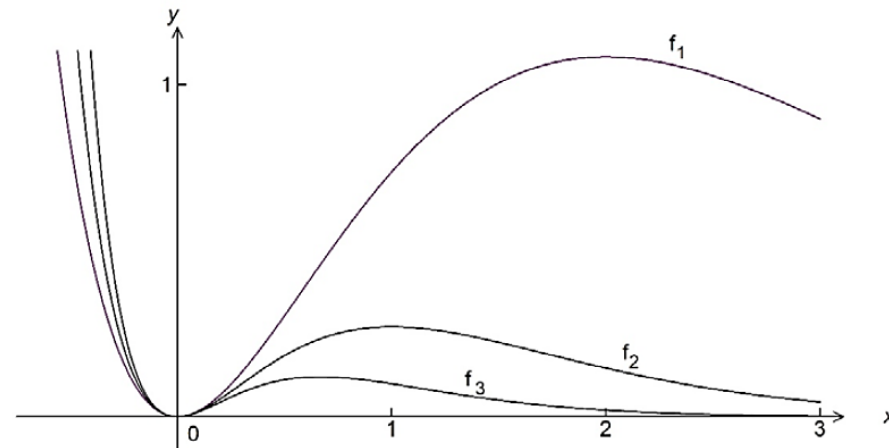
$$f''_a\left(\frac{2}{a}\right) = \left(4 - 8 \cdot a \cdot \frac{2}{a} + 2 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}} = -4 \cdot e^{-2} < 0 \quad \text{en } x = \frac{2}{a} \text{ hay un } \mathbf{máximo relativo}$$

PREGUNTA B2

En c) y d), hacer uso de

$$f_a'(x) = (4x - 2a \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x},$$

$$f_a''(x) = (4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x}.$$



c) Determinar las coordenadas de los extremos de f_a y especificar la naturaleza de cada uno.

Una vez demostrada la cual es la naturaleza de los dos extremos relativos, debemos calcular la ordenada de cada uno de ellos.

$$f_a(0) = 2 \cdot 0^2 \cdot e^{-a \cdot 0} = 0$$

En $(0, 0)$ hay un mínimo relativo.

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}} = \frac{8}{a^2} \cdot e^{-2}$$

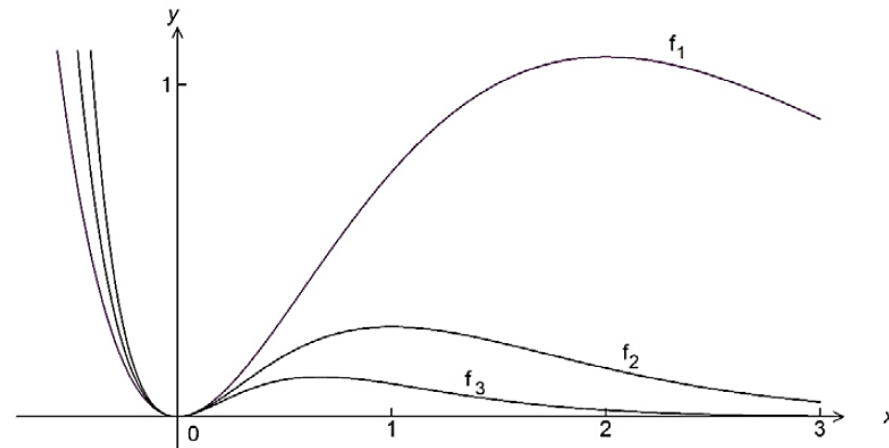
En $\left(\frac{2}{a}, \frac{8}{a^2} \cdot e^{-2}\right)$ hay un máximo relativo.

PREGUNTA B2

En c) y d), hacer uso de

$$f'_a(x) = (4x - 2a \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x},$$

$$f''_a(x) = (4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x}.$$



d) Determinar el número de puntos de inflexión de la gráfica de f_a . Justificar la respuesta.

Se iguala la segunda derivada a cero.

$$f''_a(x) = (4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2) \cdot e^{-a \cdot x} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2 = 0 \\ e^{-a \cdot x} = 0 \longrightarrow \text{No existe solución real} \end{cases}$$

$4 - 8 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2 \cdot x^2 = 0$ Se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-(-8a) \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 2a^2 \cdot 4}}{2 \cdot 2a^2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 + 32a^2}}{4a^2} = \frac{8a \pm \sqrt{96a^2}}{4a^2}$$

Se observa que tiene
dos soluciones.

La función posee **dos puntos** de inflexión.

PREGUNTA B3

La siguiente tabla muestra el número de coches diésel, y , (en millones) en Bélgica de 2016 a 2021.

Años		2016	2017	2018	2019	2020	2021
Años después de 2016	x	0	1	2	3	4	5
Número de coches diésel (millones)	y	3,42	3,34	3,19	3,01	2,4	2,62

- a) Determinar una ecuación de la recta de regresión de y sobre x .
- b) Determinar el coeficiente de correlación lineal r (con 3 cifras decimales).

Se hace el proceso con la calculadora.

$$y = -0,2x + 3,497$$

$$r = -0,917$$

PREGUNTA B3

La siguiente figura muestra el gráfico de dispersión que representa los datos.

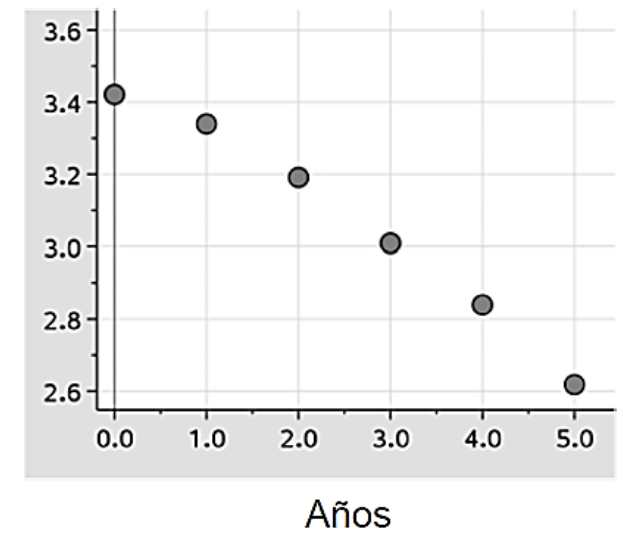
Millones

c) Comentar la naturaleza de la correlación, utilizando el gráfico de dispersión y el coeficiente de correlación $r = -0,99$.

Al tener el coeficiente de correlación muy próximo a -1 , la correlación entre las dos variables es muy fuerte, prácticamente funcional.

Al ser el coeficiente de correlación negativo, deducimos que, a mayor número de años transcurridos desde 2016, menor número de millones de coches diésel habrá en circulación.

Por último, comentar que el valor propuesto no es correcto ya que se observa que el primer punto no está alineado con el resto. Además, en el apartado anterior se ha visto que el valor de r no es ese.



PREGUNTA B3

Considerar ahora los coches eléctricos. La variable aleatoria X denota la distancia en kilómetros (km) que un determinado coche eléctrico puede conducir con una batería llena.

Según las pruebas del fabricante, se sabe que: $P(X \geq 600) = 0,023$ y $P(X \leq 550) = 0,841$.

Suponer que X sigue una distribución normal con media μ y desviación típica (o desviación estándar) σ .

d) Determinar μ y σ .

Tipificamos en primer lugar:
$$P(X \geq 600) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,023 \longrightarrow P\left(Z \geq \frac{600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,023$$

Puesto que la función inversa de la normal sólo la podemos utilizar con expresiones del tipo $P(Z < a)$, debemos transformar la expresión utilizando la propiedad: $P(Z > a) = 1 - P(Z < a)$

$$P\left(Z \geq \frac{600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,023 \longrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,023 \longrightarrow P\left(Z < \frac{600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,977$$

Se aplica la inversa de la normal con la calculadora (en otros sistemas hay que utilizar una tabla de la normal para sacar el resultado). Se redondea el resultado: $1,995 \approx 2$.

$$\frac{600 - \mu}{\sigma} \approx 2$$

Se hace el mismo procedimiento con el otro dato.

PREGUNTA B3

Considerar ahora los coches eléctricos. La variable aleatoria X denota la distancia en kilómetros (km) que un determinado coche eléctrico puede conducir con una batería llena.

Según las pruebas del fabricante, se sabe que: $P(X \geq 600) = 0,023$ y $P(X \leq 550) = 0,841$.

Suponer que X sigue una distribución normal con media μ y desviación típica (o desviación estándar) σ .

d) Determinar μ y σ .

Tipificamos en primer lugar: $P(X \leq 550) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{550 - \mu}{\sigma}\right) = 0,841 \longrightarrow P\left(Z \leq \frac{550 - \mu}{\sigma}\right) = 0,841$

Se aplica la inversa de la normal con la calculadora (en otros sistemas hay que utilizar una tabla de la normal para sacar el resultado). Se redondea el resultado: $0,9985 \approx 1$. $\frac{550 - \mu}{\sigma} \approx 1$

Debemos resolver el sistema de ecuaciones dado por:
$$\begin{cases} \frac{600 - \mu}{\sigma} = 2 \\ \frac{550 - \mu}{\sigma} = 1 \end{cases}$$

Se resuelve en la diapositiva siguiente por igualación.

PREGUNTA B3

Considerar ahora los coches eléctricos. La variable aleatoria X denota la distancia en kilómetros (km) que un determinado coche eléctrico puede conducir con una batería llena.

Según las pruebas del fabricante, se sabe que: $P(X \geq 600) = 0,023$ y $P(X \leq 550) = 0,841$.

Suponer que X sigue una distribución normal con media μ y desviación típica (o desviación estándar) σ .

d) Determinar μ y σ .

$$\begin{cases} \frac{600 - \mu}{\sigma} = 2 \\ \frac{550 - \mu}{\sigma} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 600 - \mu = 2\sigma \\ 550 - \mu = \sigma \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 600 - 2\sigma = \mu \\ 550 - \sigma = \mu \end{cases} \longrightarrow 600 - 2\sigma = 550 - \sigma \longrightarrow \mathbf{50 = \sigma}$$

Se calcula la media: $\mu = 550 - \sigma = 550 - 50 = 500$

Solución: $\mu = 500$ $\sigma = 50$

Este sistema de ecuaciones se podría resolver con la calculadora.

PREGUNTA B3

El fabricante de los coches eléctricos ha determinado que el 3 % de las baterías utilizadas por los coches son defectuosas. Se selecciona al azar una muestra de 100 baterías de la producción.

La variable aleatoria Y indica el número de baterías defectuosas en esta muestra.

Se puede suponer que la probabilidad de seleccionar una batería defectuosa no cambia por muestreo.

e) Determinar $P(Y \leq 3)$. Justificar la respuesta.

La variable se distribuye de forma binomial. Siendo Y el número de baterías defectuosas. $Y \sim B(100, 0,03)$

Se calcula la probabilidad: $P(Y \leq 3) = 0,6472$

La probabilidad de que haya 3 o menos baterías defectuosas es **0,6472**.

PREGUNTA B4

En un espacio tridimensional considerar

la línea d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, los puntos $B(6, -6, 3)$, $C(10, -10, 5)$ y $D(2, -8, 2)$,

la línea m que pasa por los puntos B y C , y el plano $\pi : 2x - y - 6z = -7$.

a) Calcular las coordenadas del punto de intersección de las líneas d y m .

Calculo las ecuaciones de la recta m en forma paramétrica.

1) Calculo el vector director. $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (10, -10, 5) - (6, -6, 3) = (4, -4, 2) \equiv (2, -2, 1)$

2) Escribo las ecuaciones paramétricas: $m: \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -6 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Expreso en forma paramétrica la recta d . $d: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = -6 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

PREGUNTA B4

a) Calcular las coordenadas del punto de intersección de las líneas d y m .

$$m: \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -6 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = -6 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Se igualan las coordenadas.

$$\begin{cases} -2 + 6t = 6 + 2\lambda \\ -6 + 2t = -6 - 2\lambda \\ -1 + 3t = 3 + \lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 6t - 2\lambda = 8 \\ 2t + 2\lambda = 0 \\ 3t - \lambda = 4 \end{cases}$$

Resuelvo el sistema con las dos primeras ecuaciones.

$$\begin{cases} 6t - 2\lambda = 8 \\ 2t + 2\lambda = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Se sustituyen los parámetros en las ecuaciones de las rectas.

$$m: \begin{cases} x = 6 + 2 \cdot (-1) = 4 \\ y = -6 - 2\lambda = -6 - 2 \cdot (-1) = -4 \\ z = 3 + \lambda = 3 + (-1) = 2 \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = -2 + 6 \cdot 1 = 4 \\ y = -6 + 2 \cdot 1 = -4 \\ z = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto de intersección de las líneas d y m son $A = (4, -4, 2)$.

PREGUNTA B4

b) Calcular el ángulo agudo (en grados) entre las líneas d y m .

$$m: \begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = -6 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = -6 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Se aplica la fórmula correspondiente.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (6, 2, 3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{2 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{11}{3 \cdot 7} = \frac{11}{21}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{11}{21}\right) = 58,41^\circ$$

El ángulo agudo (en grados) entre las líneas d y m es **58,41°**.

PREGUNTA B4

En un espacio tridimensional considerar los puntos $B(6, -6, 3)$, $C(10, -10, 5)$ y $D(2, -8, 2)$,

c) Determinar una ecuación del plano que contiene los puntos B , C y D .

Se calculan los vectores directores del plano pedido.

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (10, -10, 5) - (6, -6, 3) = (4, -4, 2) \equiv (2, -2, 1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{BD} = D - B = (2, -8, 2) - (6, -6, 3) = (-4, -2, -1) \equiv (4, 2, 1)$$

Se calcula el vector normal del plano.

$$\vec{n} = (2, -2, 1) \times (4, 2, 1) = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 4) = (-4, 2, 12) \equiv (2, -1, -6)$$

La ecuación del plano será: $2x - y - 6z + D = 0$

Calculo el valor de D sustituyendo uno de los puntos en la ecuación del plano.

$$2x - y - 6z + D = 0 \xrightarrow{B = (6, -6, 3)} 2 \cdot 6 - (-6) - 6 \cdot 3 + D = 0 \longrightarrow D = 0$$

La ecuación del plano es: $\pi: 2x - y - 6z = 0$

Produit vectoriel
Vector product
Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Según formulario que te dan en el examen.

PREGUNTA B4

En un espacio tridimensional considerar los puntos $B(6, -6, 3)$, $C(10, -10, 5)$ y $D(2, -8, 2)$, y el plano $\pi : 2x - y - 6z = -7$.

d) El segmento de línea $\overline{BC}$ es la base de un triángulo isósceles BCS donde S es un punto en el plano π .

Calcular las coordenadas del punto S de tal manera que el área del triángulo BCS sea mínima.

Para que el área del triángulo sea mínima, la altura de este triángulo debe ser mínima. El punto S del plano que verifica esto es aquel que se obtiene de la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y el plano π .

Calculo el punto medio del segmento $\overline{BC}$. $M = \frac{B + C}{2} = \frac{(6, -6, 3) + (10, -10, 5)}{2} = (8, -8, 4)$

Obtengo una recta perpendicular al plano $\vec{v} = (2, -1, -6)$ y que pase por el punto $M = (8, -8, 4)$.

Escribo las ecuaciones paramétricas: $r: \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -8 - \lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$

Calculo el punto S , ya que es la intersección de la recta y del plano.

PREGUNTA B4

$$r: \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -8 - \lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

En un espacio tridimensional considerar los puntos $B(6, -6, 3)$, $C(10, -10, 5)$ y $D(2, -8, 2)$,
y el plano $\pi : 2x - y - 6z = -7$.

$$\pi: 2x - y - 6z = 0$$

d) El segmento de línea $\overline{BC}$ es la base de un triángulo isósceles BCS donde S es un punto en el plano π .

Calcular las coordenadas del punto S de tal manera que el área del triángulo BCS sea mínima.

Se sustituye la ecuación de la recta en la ecuación del plano.

$$2 \cdot (8 + 2\lambda) - (-8 - \lambda) - 6 \cdot (4 - 6\lambda) = -7 \longrightarrow 16 + 4\lambda + 8 + \lambda - 24 + 36\lambda = 0 \longrightarrow 41\lambda = -7 \longrightarrow \lambda = -\frac{7}{41}$$

Se sustituye el valor del parámetro en la ecuación de la recta y se obtienen las coordenadas del punto S .

$$S: \begin{cases} x = 8 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{41}\right) = \frac{314}{41} \\ y = -8 - \left(-\frac{7}{41}\right) = -\frac{321}{41} \\ z = 4 - 6 \cdot \left(-\frac{7}{41}\right) = \frac{206}{41} \end{cases}$$

Las coordenadas de S son: $S: \left(\frac{314}{41}, -\frac{321}{41}, \frac{206}{41}\right)$