



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

PARTE A · SIN CALCULADORA

JUNIO 2023



Observaciones

Para la realización de este examen se permite la utilización de un formulario. He tratado de adaptar los ejercicios de geometría a dicho formulario. Existen formas más rápidas de calcular el producto mixto y el producto vectorial, pero según el formulario los ejercicios se resolverían tal como he propuesto. No hay problema si utilizas otras metodologías siempre y cuando estén justificadas y te lleven al resultado correcto.

Las fórmulas del resto de temas también se han utilizado a partir del formulario, aunque no se indique explícitamente.

La duración del examen es de 2 horas y no se permite el uso de calculadora.

Salvo indicación contraria, no se dará la puntuación máxima a una respuesta correcta que no vaya acompañada de los razonamientos o explicaciones que permiten llegar a dicha solución.

Los **ejercicios 1, 3 y 8** los he hecho de dos maneras diferentes tratando de explicar la forma que me parece a mí más fácil y también tratando de hacer el ejercicio con los conocimientos que tienen los estudiantes de las escuelas europeas (que no son los mismos que en otros sistemas).

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Optimización de funciones



Exámenes de años anteriores
en español



Geometría en el espacio.



Exámenes de años anteriores
en inglés.



Geometría. Distancias y ángulos.



Ejercicio 1. Integral definida

Calcular $\int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$

Solución: En primer lugar, calculo la función primitiva $\sqrt{4x+1}$

$$F(x) = \int \sqrt{4x+1} dx = \int (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \int 4 \cdot (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot (4x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4x+1)^3}$$

Es necesario recordar la regla de integración de una potencia: $\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Para calcular el valor de la integral se utiliza la regla de Barrow.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx &= F(2) - F(0) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4 \cdot 2 + 1)^3} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4 \cdot 0 + 1)^3} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{9^3} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1^3} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} = \frac{27-1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Solución: $\int_0^2 \sqrt{4x+1} dx = \frac{13}{3}$

Ejercicio 1. Integral definida

Calcular $\int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$

Solución: Otra forma de calcular la función primitiva de $\sqrt{4x+1}$ es mediante el **método de sustitución**. De hecho, en el formulario sólo nos proporcionan la fórmula de la integral potencial en x, lo cual nos lleva a este método de integración. Aunque no es mi favorito, lo voy a explicar para que aquellos que lo utilicéis podáis corregir el ejercicio o practicar este método.

Primitives des fonctions usuelles

Integrals of standard functions

Stammfunktionen der Grundfunktionen

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$e^x + C$	$\ln x + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$

$$t = 4x + 1$$

$$dt = 4dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

$$F(x) = \int \sqrt{4x+1} dx = \int (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \int t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{t^3} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4x+1)^3}$$

Para calcular el valor de la integral se utiliza la regla de Barrow al igual que se hizo en la diapositiva anterior. No lo haré, pero dejo la solución de nuevo.

$$\text{Solución: } \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx = \frac{13}{3}$$

Ejercicio 2. Números complejos

Considerar el número complejo $z = \frac{a - 2i}{a - i}$ donde a es un número real.

Determinar a tal que la parte imaginaria de z sea $\frac{1}{2}$

Solución: Se multiplica y divide por la expresión conjugada para resolver el cociente.

$$z = \frac{a - 2i}{a - i} \cdot \frac{a + i}{a + i} = \frac{a^2 + ai - 2ai - 2i^2}{a^2 - i^2} = \frac{a^2 - ai + 2}{a^2 + 1} = \frac{a^2 + 2}{a^2 + 1} + \frac{-a}{a^2 + 1} i$$

Se iguala la parte imaginaria a $\frac{1}{2}$

$$\frac{-a}{a^2 + 1} = \frac{1}{2} \longrightarrow -2a = a^2 + 1 \longrightarrow a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a + 1)^2 = 0$$

$$a + 1 = 0$$

$$a = -1$$

Solución: $a = -1$

Ejercicio 3. Geometría en el espacio

MÉTODO tipo escuela europea, luego lo haré con determinantes. Quitar después de grabar.

En un espacio tridimensional, un paralelepípedo está definido por los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Calcular el volumen del paralelepípedo.

Solución:

Según formulario que te dan en el examen.

El volumen de un paralelepípedo se calcula con el valor absoluto del producto mixto. $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Según formulario que te dan en el examen.

Se calcula el producto vectorial en primer lugar:

Produit vectoriel	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$
Vector product	
Vektorprodukt	

$$\vec{v} \times \vec{w} = (1, 1, 0) \times (1, 3, 4) = (3 \cdot 7 - 4 \cdot 5, 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 7, -1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = (1, 15, -11)$$

Se calcula el producto escalar: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (1, 2, 3) \cdot (1, 15, -11) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot (-11) = -2$

Y su valor absoluto: $V = |-2| = 2$

Según formulario que te dan en el examen.

Solución: $V = 2$ unidades de volumen

Ejercicio 3. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional, un paralelepípedo está definido por los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Calcular el volumen del paralelepípedo.

Solución: Si tienes conocimientos de determinantes, este ejercicio se puede resolver en un solo paso.

El volumen de un paralelepípedo se calcula con el valor absoluto del producto mixto. $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |-2| = 2$$

Solución: $V = 2$ unidades de volumen

Ejercicio 4. Combinatoria

Sarah tiene 7 latas idénticas de refresco que quiere repartir entre 3 amigos. ¿De cuántas maneras diferentes puede distribuir todas estas latas entre sus amigos con la condición de que cada amigo reciba al menos una lata de refresco?

Solución:

En primer lugar, trato de escribir algunas posibles combinaciones para hacerme una idea de la situación. Supongo que los 3 amigos son A, B y C. Asigno un dígito a las latas que recibe cada uno, en el orden ABC.

Algunas posibles combinaciones serían: 511, es decir A recibe 5 latas y B y C reciben 1 cada uno.

421, A recibe 4 latas, B recibe 2 latas y C recibe una lata.

Si cada amigo debe recibir al menos una lata, primero distribuiremos una lata a cada uno, lo que deja 4 latas restantes para distribuir. Ahora, las posibles combinaciones quedarían limitadas. Se ponen algunos ejemplos.

Algunas posibles combinaciones serían: 004, 040, 400, 103, 013,...

Como se puede comprobar, la restricción es que los dígitos sumen 4.

Debemos decidir la técnica de recuento adecuada para este problema.

La técnica adecuada para este tipo de casos es la **combinación con repetición**. También se podría hacer un recuento manual con un diagrama de árbol (aunque no es lo ideal, es mejor que no hacer nada).

Ejercicio 4. Combinatoria

Sarah tiene 7 latas idénticas de refresco que quiere repartir entre 3 amigos. ¿De cuántas maneras diferentes puede distribuir todas estas latas entre sus amigos con la condición de que cada amigo reciba al menos una lata de refresco?

Solución:

En este tipo de situación, Jacob Bernoulli nos indica que podemos utilizar la siguiente fórmula: $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Según formulario que te dan en el examen.

Siendo k el número de objetos y n el número de barreras.

Puesto que tenemos 4 objetos idénticos (las latas) y 2 barreras (que representan las divisiones entre los amigos).

$$CR_{4,2} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$$

Puedes ver más ejemplos de combinaciones con repetición en este enlace:

<https://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/Tecnicas%20de%20contar%203.pdf>

Solución: *Se puede hacer el reparto de 15 formas diferentes*

Ejercicio 5. Sucesiones

Considerar una progresión aritmética $(u_n), n \geq 1$, donde $u_1 = 120$ y $u_4 = 90$

a) Determinar la diferencia constante de (u_n) y calcular la suma de los 20 primeros términos de (u_n) .

Según formulario que te dan en el examen.

Solución: Las fórmulas de la progresión aritmética son: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ Término general.

Se sustituyen los datos en las fórmulas.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \text{Suma de n términos.}$$

$$"u_1 = 120 \text{ y } u_4 = 90". \quad 90 = 120 + (4 - 1) \cdot d \longrightarrow 90 = 120 + 3d \longrightarrow d = -10$$

$$\text{Se calcula el valor de } u_{20} \quad u_{20} = 120 + (20 - 1) \cdot (-10) = -70$$

$$\text{Se sustituyen los datos en la fórmula de la suma.} \quad S_{20} = \frac{(u_1 + u_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(120 - 70) \cdot 20}{2} = 500$$

La diferencia es **-10** y la suma de los 20 primeros términos es **500**.

Ejercicio 5. Sucesiones

(v_n) es una progresión geométrica con $v_1 = 120$ y $v_3 = 90$ b) Calcular los posibles valores de v_2

Solución: Las fórmulas de la progresión geométrica son:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Término general.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Suma de n términos.

Se sustituyen los datos en las fórmulas.

$$“v_1 = 120 \text{ y } v_3 = 90”. \quad 90 = 120 \cdot r^{3-1} \longrightarrow \frac{90}{120} = r^2 \longrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$v_2 = v_1 \cdot r^{2-1} = 120 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^1 = \pm 120 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm 60 \cdot \sqrt{3}$$

Solución:

$$v_2 = 60 \cdot \sqrt{3}$$

$$v_2 = -60 \cdot \sqrt{3}$$

Ejercicio 6. Variables aleatorias continuas

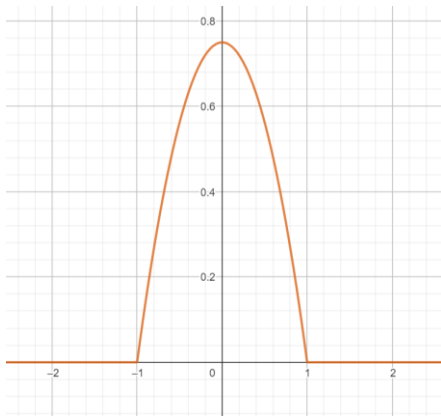
La función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria continua viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1 - x^2) & , -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

- a) Mostrar que $k = \frac{3}{4}$
- b) Esbozar el gráfico de f

Solución: Puesto que es una función de densidad de f , el valor de su integral debe ser 1.

$$\int_{-1}^1 k \cdot (1 - x^2) dx = k \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = k \cdot \left[\left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] = k \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \cdot k = 1 \longrightarrow \boxed{k = \frac{3}{4}}$$

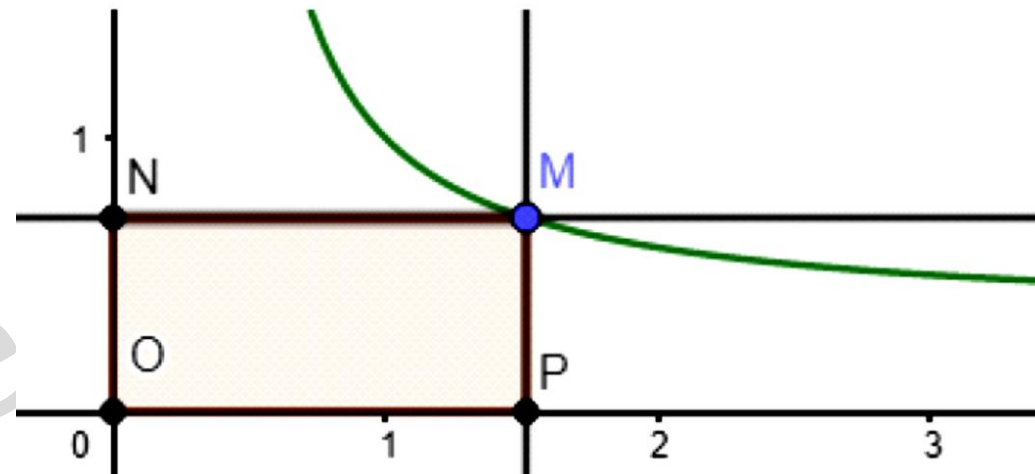


El gráfico es el de una función cuadrática invertida, que tiene su máximo en $x=0$. Puedes dar algunos valores para mejorar la gráfica.

Ejercicio 7. Optimización de funciones

Considerar la función f definida por $f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$, $x > \frac{1}{3}$.

Para cualquier valor $x > \frac{1}{3}$, considerar el rectángulo $OPMN$ donde $O(0; 0)$, $P(x; 0)$, $M(x; f(x))$ y $N(0; f(x))$.



a) Expresar el área A del rectángulo $OPMN$ en función de x ,

y mostrar que $A'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(3x - 1)^2}$.

Solución: El área del rectángulo es el producto de su base por su altura.

$$A(x) = \overline{OP} \cdot \overline{MP} = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{x+1}{3x-1} = \frac{x^2 + x}{3x-1} \quad \text{Calculo la derivada aplicando la regla del cociente.}$$

$$A'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (3x-1) - (x^2+x) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 2x + 3x - 1 - 3x^2 - 3x}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(3x-1)^2}$$

Que era lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 7. Optimización de funciones

b) Mostrar que hay un valor de x para el cual el área del rectángulo $OPMN$ es un mínimo y determinar este valor de x .

$$A(x) = \frac{x^2 + x}{3x - 1} \quad A'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(3x - 1)^2}$$

Solución: Para determinar el mínimo de la función se estudia el signo de la derivada de la función.

$$\frac{3x^2 - 2x - 1}{(3x - 1)^2} = 0 \longrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \begin{cases} x = \frac{2 + 4}{6} = 1 \\ x = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Puesto que $x > 1/3$, descartamos la solución negativa para el estudio de signos de la función derivada.

	$1/3$	1	$+\infty$
$A'(x)$	$-$	$+$	
$A(x)$			

Se observa que la función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ ya que decrece antes de ese valor y crece después.

El valor del área mínima se alcanza cuando $x = 1$.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio.

En un espacio tridimensional, considerar los planos $\pi_1: 2x - 2y + z = -1$ y $\pi_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Mostrar que los planos π_1 y π_2 no son secantes.

Solución: Para que dos planos no sean secantes, deben ser paralelos. En ese caso, los dos vectores normales deben ser iguales o proporcionales.

$$\vec{n}_1 = (2, -2, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 0) \times (1, 3, 4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (4, -4, 2)$$

Puesto que: $\vec{n}_2 = 2 \cdot \vec{n}_1$ podemos decir que los planos son paralelos o coincidentes. Para demostrar que son paralelos (y no coincidentes), se toma un punto de π_2 y se comprueba que no pertenece a π_1 .

$$\pi_1: 2x - 2y + z = -1 \xrightarrow{P = (7, 7, 5)} 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = -1 \longrightarrow 5 = -1$$

Puesto que P no pertenece a π_1 podemos afirmar que π_1 y π_2 **no son secantes**.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio.

En un espacio tridimensional, considerar los planos $\pi_1: 2x - 2y + z = -1$ y $\pi_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Mostrar que los planos π_1 y π_2 no son secantes.

Solución: Para que dos planos no sean secantes, deben ser paralelos. En ese caso, los dos vectores normales deben ser iguales o proporcionales.

$$\vec{n}_1 = (2, -2, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 0) \times (1, 3, 4) = (1 \cdot 4 - 0 \cdot 3, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = (4, -4, 2)$$

Según formulario que te dan en el examen.

Produit vectoriel

Vector product

Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Puesto que: $\vec{n}_2 = 2 \cdot \vec{n}_1$ podemos decir que los planos son paralelos o coincidentes. Para demostrar que son paralelos (y no coincidentes), se toma un punto de π_2 y se comprueba que no pertenece a π_1 .

$$\pi_1: 2x - 2y + z = -1 \xrightarrow{P = (7, 7, 5)} 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = -1 \longrightarrow 5 = -1$$

Puesto que P no pertenece a π_1 podemos afirmar que π_1 y π_2 **no son secantes**.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio.

En un espacio tridimensional, considerar los planos $\pi_1: 2x - 2y + z = -1$ y $\pi_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

b) Calcular la distancia entre los planos π_1 y π_2 .

Solución: Al ser los dos planos paralelos, se puede calcular la distancia de un punto P de π_2 al plano π_1 .

Según formulario que te dan en el examen.

Distance d'un point à un plan

Distance from a point to a plane

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d(M, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se expresa π_1 de forma que se iguale a cero la ecuación del plano. $\pi_1 = 2x - 2y + z + 1 = 0$

$$d(\pi_1, P) = \frac{|2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

La distancia entre los planos π_1 y π_2 es 2 unidades de longitud.

Ejercicio 8. Geometría en el espacio.

En un espacio tridimensional, considerar los planos $\pi_1: 2x - 2y + z = -1$ y $\pi_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

c) El plano π_3 es equidistante a los planos π_1 y π_2 . Determinar una ecuación del plano π_3 .

Solución: Al ser los planos π_1 y π_2 paralelos, el plano equidistante de ambos debe tener el mismo vector normal.

$\vec{n}_3 = (2, -2, 1)$ Pudiendo escribir la ecuación del plano pedido: $\pi_3: 2x - 2y + z + D = 0$

Se toma un punto de π_1 y otro de π_2 . $\pi_1: 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + z = -1 \longrightarrow z = -1$

El punto de π_1 es: $P = (0, 0, -1)$ El punto de π_2 es: $Q = (7, 7, 5)$

Se calcula la distancia de P y Q al plano π_3 y se igualan a la mitad de la distancia entre ellos. $d(\pi_3, P) = d(\pi_3, Q) = 1$

$$\frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 + D|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 + D|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1 \longrightarrow |-1 + D| = |5 + D| = 3 \longrightarrow \begin{cases} |-1 + D| = 3 \rightarrow D = -2; D = 4 \\ |5 + D| = 3 \rightarrow D = -2; D = -8 \end{cases}$$

La solución común es la válida. La ecuación del plano es: $\pi_3: 2x - 2y + z - 2 = 0$