



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

PARTE A · SIN CALCULADORA

JUNIO 2019





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Ejercicio 1: Primitivas

1) Las funciones F y G están definidas por:

$$F(x) = -\frac{1}{x+1} \text{ y } G(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

Comprobar que F y G son primitivas de la misma función.

Definición: F(x) es una primitiva de f(x) si y solo si $F'(x) = f(x)$

Resolución: Se debe calcular la derivada de cada función y verificar $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

Para hacer ambas derivadas utilizaremos la **regla del cociente**. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - u * v'}{v^2}$

$$F'(x) = \frac{0 * (x+1) - (-1) * 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{1 * (2x+2) - (x-1) * 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x+2 - 2x+2}{2^2 * (x+1)^2} = \frac{4}{4 * (x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Se observa que las derivadas son iguales, por lo tanto F(x) y G(x) son primitivas de la misma función, que será $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Ejercicio 2. Geometría

2) Se consideran en el espacio la superficie esférica $S: (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 3$ y

$$\text{la recta } d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

¿Cuántos puntos tienen en común la superficie esférica S y la recta d?

Resolución: Se sustituyen los puntos de la recta d en la ecuación de la esfera y se resuelve la ecuación que queda.

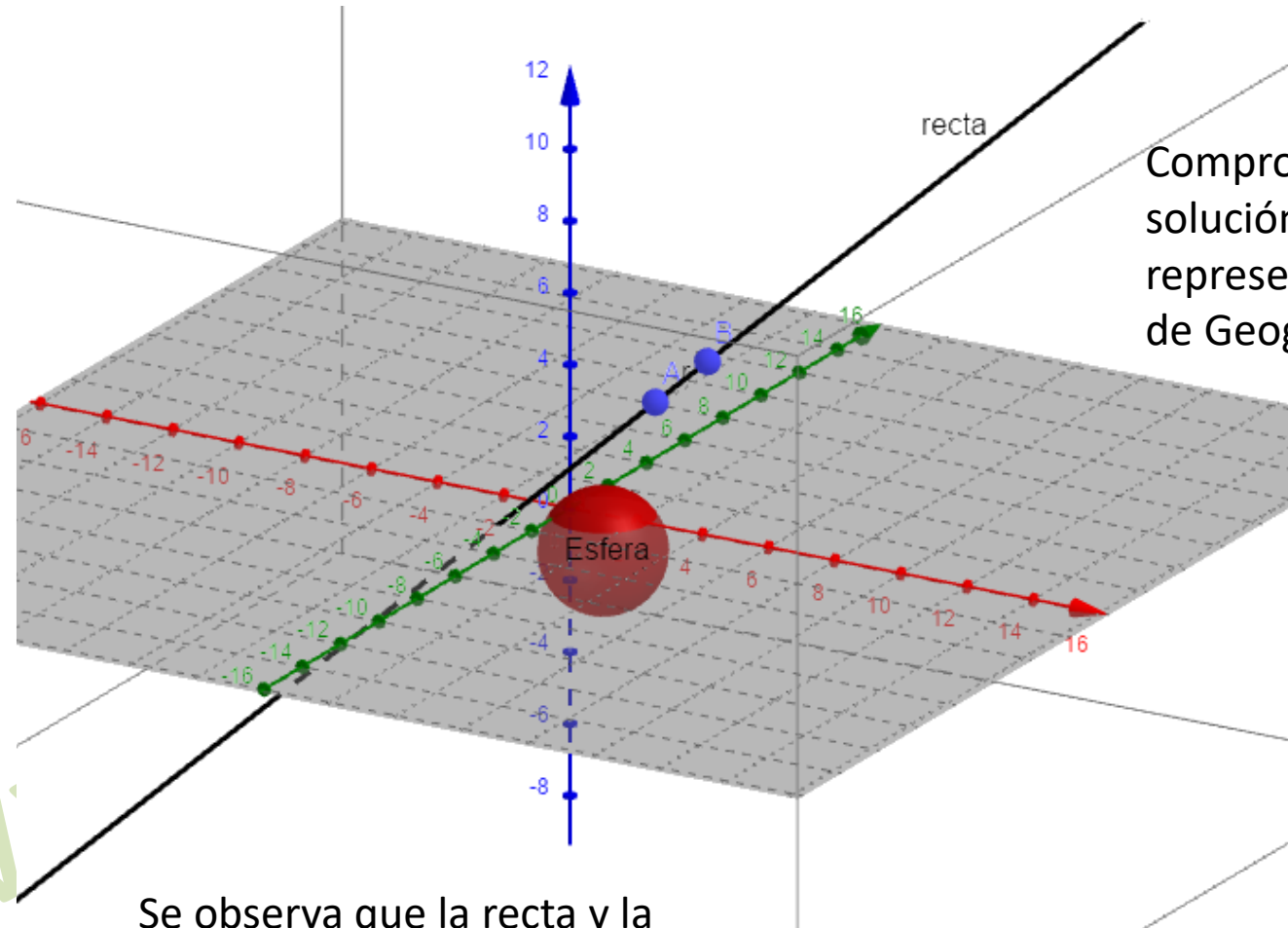
$$(2 + t - 1)^2 + (1 + t)^2 + (3 + t + 1)^2 = 3 \rightarrow (t + 1)^2 + (t + 1)^2 + (t + 4)^2 = 3$$

$$t^2 + 2t + 1 + t^2 + 2t + 1 + t^2 + 8t + 16 = 3 \rightarrow 3t^2 + 12t + 18 = 3$$

$$3t^2 + 12t + 15 = 0 \rightarrow t^2 + 4t + 5 = 0 \rightarrow t = \nexists$$

Como la ecuación no tiene solución la recta y la esfera **no tienen ningún punto en común.**

Ejercicio 2. Geometría



Comprobamos la solución con una representación gráfica de Geogebra

Se observa que la recta y la esfera no se cortan.

Ejercicio 3. Probabilidad

3) Tenemos dos cajas con lápices de colores. En la caja A hay 4 lápices: 2 negros y dos verdes. En la caja B hay 10 lápices: 4 verdes y 6 rojos.

Se saca al azar un lápiz de B y se introduce en la caja A.

A continuación, se saca al azar un lápiz de la caja A y se introduce en la caja B.

Calcular la probabilidad de que haya, como al principio, 2 lápices negros y 2 verdes en la **caja A** y 4 lápices verdes y 6 rojos en la **caja B**.

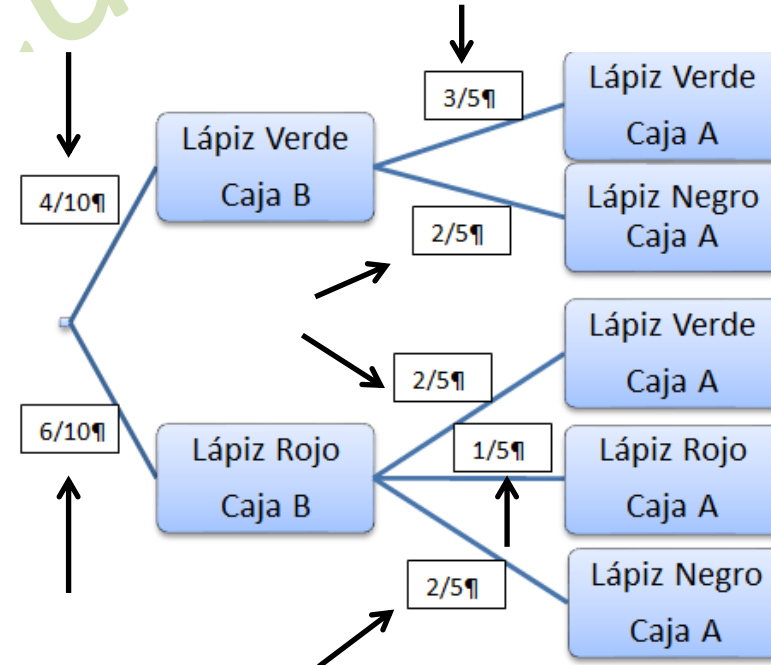
Resolución: Representaremos el diagrama de árbol para plantear todas las posibilidades.

Se debe elegir un lápiz del mismo color en ambas extracciones.

$$P(\text{Igual}) = P(V_B) * P\left(\frac{V_A}{V_B}\right) + P(R_B) * P\left(\frac{R_A}{R_B}\right)$$

$$P(\text{Igual}) = \frac{4}{10} * \frac{3}{5} + \frac{6}{10} * \frac{1}{5} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$$

Por lo tanto la probabilidad es de $\frac{9}{25}$



Ejercicio 4. Sucesiones recurrentes

4) Se considera la sucesión (u_n) definida por:
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 - 2u_n}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$
 Supuesto que la serie es convergente, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Resolución: Dado que la sucesión es convergente, se puede afirmar que:

Si $n \rightarrow \infty$, $u_{n+1} \cong u_n$ y ambos valores tienden a L

Por ello podemos escribir:

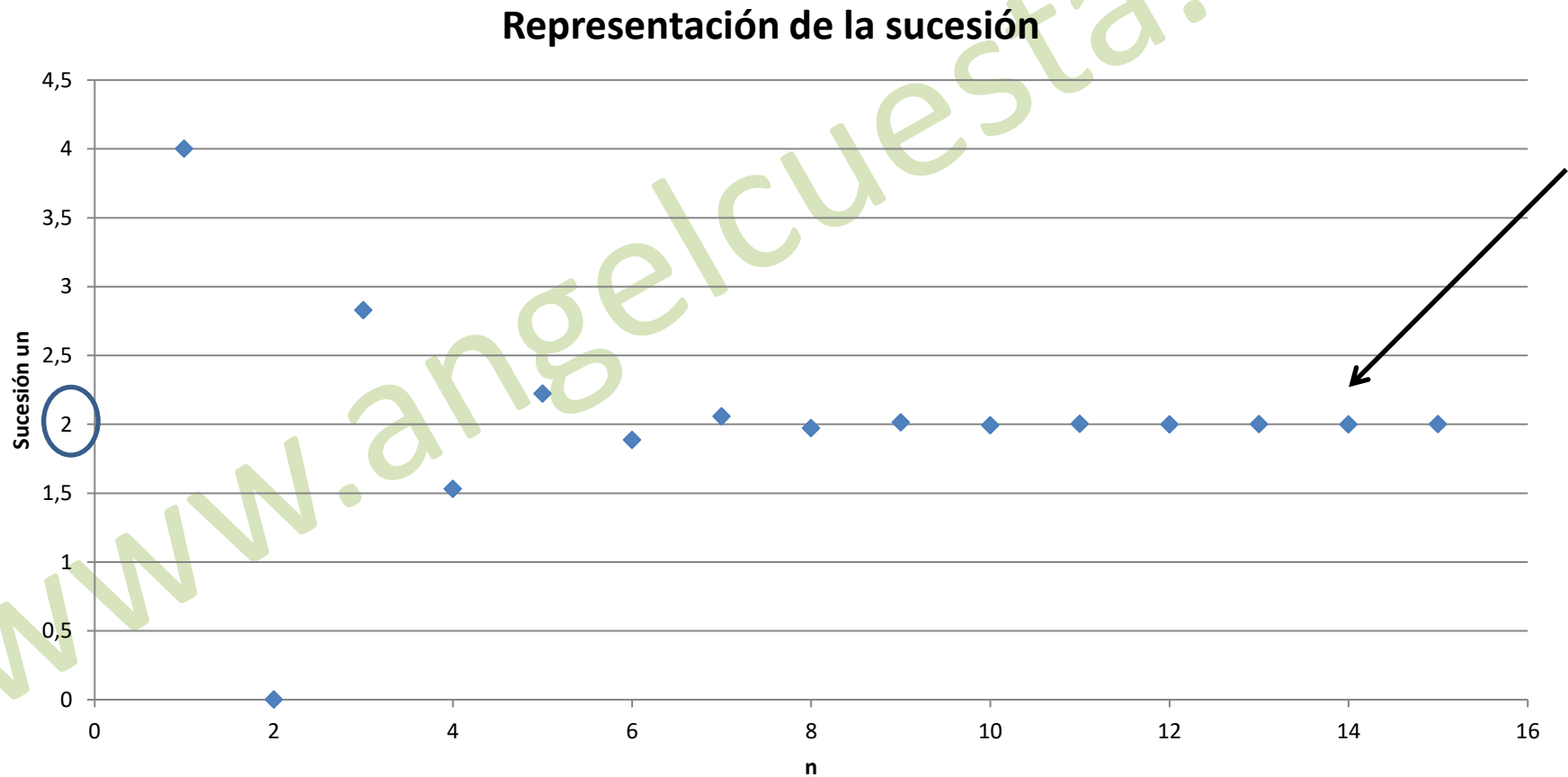
$$L = \sqrt{8 - 2L} \rightarrow L^2 = 8 - 2L \rightarrow L^2 + 2L - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} L = 2 \\ L = -4 \end{cases}$$

Como el límite debe ser un valor positivo (ya que $\sqrt{8 - 2L}$ siempre es positivo), la solución del ejercicio es $L=2$.

Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

Ejercicio 4. Sucesiones recurrentes

Lo compruebo gráficamente (esto no lo podéis hacer en el examen).



Ejercicio 5. Números complejos

5) Se consideran los números complejos

$$w = 2 + 2i \quad y \quad z = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

Calcular $w^4 * z^9$

Resolución: Expresaré ambos números en forma polar para operarlos más fácilmente.

$$w = 2 + 2i \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo; } r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\ \text{Argumento; } \tan \theta = \frac{2}{2} \rightarrow \theta = 45^\circ \end{cases} ; w = \sqrt{8}_{45^\circ} = \sqrt{8}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \begin{cases} \text{Módulo; } r = 1 \\ \text{Argumento; } \theta = \frac{5}{6}\pi \end{cases} ; z = 1_{\frac{5}{6}\pi} = 1_{150^\circ}$$

Ejercicio 5. Números complejos

Calculo los valores de las potencias de forma individual:

$$w^4 = (\sqrt{8}_{45^\circ})^4 = (\sqrt{8^4})_{45 \cdot 4} = 64_{180^\circ} = -64,$$

$$z^9 = \left(1_{\frac{5}{6}\pi}\right)^9 = 1_{\frac{5}{6}\pi \cdot 9} = 1_{\frac{45}{6}\pi} = 1_{\frac{15}{2}\pi} = 1_{\frac{3}{2}\pi} = 1_{270^\circ} = -i,$$

Y ahora ya puedo terminar la operación que se pide:

$$w^4 * z^9 = (-64) * (-i) = 64i$$

Solución: $64i$

Ejercicio 6. Funciones.

6) Se considera la función f definida por $f(x) = e^x * (x^2 + ax)$ donde a es un número real.

Comprobar que la gráfica de f tiene exactamente dos puntos en los que la tangente es horizontal, independientemente de los valor de a .

Resolución: Los puntos de tangente horizontal son aquellos que anulan la primera derivada.

Para derivar aplico la regla del producto. $(u * v)' = u' * v + u * v'$

$$f'(x) = e^x * (x^2 + ax) + e^x * (2x + a) = e^x * (x^2 + ax + 2x + a),$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x * (x^2 + ax + 2x + a) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow x = \emptyset \\ x^2 + (a + 2)x + a = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{(a + 2)^2 - 4a}}{2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Solución: Como se puede ver siempre habrá dos soluciones independientemente del valor de a . Aunque las soluciones dependerán de a .

Ejercicio 7. Geometría.

7) Se considera en el espacio tridimensional la recta g que pasa por los puntos $A(0,1,2)$ y $B(-2,4,-4)$. Hallar las coordenadas de los puntos de la recta g cuya distancia al punto A es 14.

Resolución: Expresaré la ecuación de la recta g en forma paramétrica:

$$\text{vector director} = \vec{v} = B - A = (-2, 4, -4) - (0, 1, 2) = (-2, 3, -6)$$

$$g: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 - 6\lambda \end{cases} \rightarrow \text{tomo un punto genérico; } P_g = (-2\lambda, 1 + 3\lambda, 2 - 6\lambda)$$

Se calcula la distancia de P_g a A en función de λ y se iguala a ± 14 .

$$d_{P_g A} = \sqrt{[0 - (-2\lambda)]^2 + [(1 + 3\lambda) - 1]^2 + [(2 - 6\lambda) - 2]^2} = \sqrt{4\lambda^2 + 9\lambda^2 + 36\lambda^2} = \sqrt{49\lambda^2} = 7\lambda = \pm 14$$

Despejando nos queda $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$.

Sustituyendo en g , obtenemos los puntos: $P = (-4, 7, -10)$ y $Q = (4, -5, 14)$

Solución: Los puntos de la recta g que distan 14 unidades de A son:

$$P = (-4, 7, -10) \text{ y } Q = (4, -5, 14)$$

Ejercicio 7. Geometría.

Representación gráfica de la solución. Esto no se hace en el examen.

