PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

CASTILLA Y LEÓN

MATEMÁTICAS

JUNIO 2021

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

Teoría y ejercicios de probabilidad.

Matrices y determinantes.
Teoría y ejercicios.

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Junio 2021

Ejemplo problema sistema de
3 ecuaciones con 3 incógnitas

PAU Comunidad Valenciana
Septiembre 2020

Teoría y ejercicios de estadística.

Ejercicio 1

El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

Solución: Se definen las incógnitas del problema.

x= nº de billetes de 10 euros.
y= nº de billetes de 20 euros.
z= nº de billetes de 50 euros.

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

"Hemos sacado 290 euros del banco" $10x + 20y + 50z = 290$

"el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes" $x + y + z = 8$

"El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros" $x = 2y \longrightarrow x - 2y = 0$

Se resuelve el sistema por la regla de Cramer.

Ejercicio 1

Determinantes

Quedando el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 290 & 20 & 50 \\ 8 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-220}{-110} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 290 & 50 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-110}{-110} = \mathbf{1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 20 & 290 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-550}{-110} = \mathbf{5}$$

Solución: El cajero entregó, **2 billetes de 10 euros**, **1 billete de 20 euros** y **5 billetes de 50 euros.**

Ejercicio 2

a) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, resolver: $X=A+B\cdot C$

b) Calcular $\int (2x-3))\cdot e^{x^2-3x}dx$

Solución:

Se calcula primero el producto de B por C.

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 5+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 4\\ 4\cdot 5+(-3)\cdot 1 & 4\cdot 1+(-3)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2\\ 17 & -8\end{pmatrix}$$

Se calcula X.

$$X=A+B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & -2\\ 17 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 15 & -4\end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{X=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 15 & -4\end{pmatrix}}$

La función primitiva se calcula aplicando directamente la regla de integración de las funciones exponenciales.

$$\int (2x-3)\cdot e^{x^2-3x}dx=\boxed{e^{x^2-3x}+C}$$

Ya que: $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$

Ejercicio 3

En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Elegimos al azar un alumno de esa clase.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?

b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?

c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés?. Razona la respuesta.

Solución:

Se construye una tabla de contingencia.

Para calcular las probabilidades se debe utilizar la regla de Laplace.

	Ap Mates	No Ap Mates	TOTAL
Ap inglés	**10**	**6**	16
No Ap Inglés	**8**	6	**14**
TOTAL	18	**12**	30

$$P = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ de\ casos\ totales}$$

$$P(Ap\ Inglés\ y\ Ap\ Mates) = \frac{10}{30} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$P(Ap\ Inglés/Ap\ Mates) = \frac{10}{18} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

Dos sucesos son independientes si: $P(Ap\ Inglés) \cdot P(Ap\ Mates) = P(Ap\ Inglés\ y\ Ap\ Mates)$

Sustituyo y compruebo: $\frac{16}{30} \cdot \frac{18}{30} = \frac{10}{30} \longrightarrow \frac{8}{25} \neq \frac{1}{3}$

Por lo tanto, los sucesos **no son independientes.**

Ejercicio 4

Dada la función f(x)= $-x^4 + x^2$

a) Calcular los puntos de corte con los ejes.
b) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Calcular sus máximos y mínimos.
d) Representar gráficamente su función.

Solución: a) Por ser un polinomio su dominio son todos los números reales.

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = -0^4 + 0^2 = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0, 0)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow -x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (-x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0, 0)}} \\ -x^2 + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{B = (-1, 0)} \\ \boldsymbol{C = (1, 0)} \end{matrix}} \end{cases}$$

Ejercicio 4

Dada la función f(x)= $-x^4 + x^2$

a) Calcular los puntos de corte con los ejes.
b) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Calcular sus máximos y mínimos.
d) Representar gráficamente su función.

Solución: Se calcula la derivada y se iguala a cero para estudiar la monotonía. $f'(x) = -4x^3 + 2x$

$$-4x^3 + 2x = 0 \longrightarrow 2x \cdot (-2x^2 + 1) = 0 \to \begin{cases} 2x = 0 \longrightarrow x = 0 \\ -2x^2 + 1 = 0 \longrightarrow 2x^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{1/2} \\ x = \sqrt{1/2} \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{1/2}$	0	$\sqrt{1/2}$	$+\infty$
f'(x)	+	−	+	−	

CRECIENTE DECRECIENTE CRECIENTE DECRECIENTE

$f'(-1) = 2 > 0$ $f'(-0'5) = -0'5 < 0$ $f'(0'5) = 0'5 > 0$ $f'(1) = -2 < 0$

$$\boxed{f(x)\ es\ creciente\ si\ x \in \left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right) \cup \left(0, \sqrt{1/2}\right)}$$

$$\boxed{f(x)\ es\ decreciente\ si\ x \in \left(-\sqrt{1/2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{1/2}, +\infty\right)}$$

Ejercicio 4

Dada la función f(x)= $-x^4 + x^2$

a) Calcular los puntos de corte con los ejes.
b) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Calcular sus máximos y mínimos.
d) Representar gráficamente su función.

b) Aplicaré el criterio de la segunda derivada. Para ello la calculo en primer lugar y sustituyo los valores que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = -4x^3 + 2x \longrightarrow f''(x) = -12x^2 + 2 \longrightarrow \begin{cases} f''\left(-\sqrt{1/2}\right) = -12 \cdot \left(-\sqrt{1/2}\right)^2 + 2 = -4<0; \text{ Máximo relativo} \\ f''\left(\sqrt{1/2}\right) = -12 \cdot \left(\sqrt{1/2}\right)^2 + 2 = -4<0; \text{ Máximo relativo} \\ f''(0) = -12 \cdot (0)^2 + 2 = 2>0; \text{ Mínimo relativo} \end{cases}$$

Se calculan las imágenes de ambos máximos relativos y el del mínimo relativo sustituyendo en la función.

$$f\left(-\sqrt{1/2}\right) = -\left(-\sqrt{1/2}\right)^4 + \left(-\sqrt{1/2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{\left(-\sqrt{1/2}, \frac{1}{4}\right) \textit{ es máximo relativo}}$$

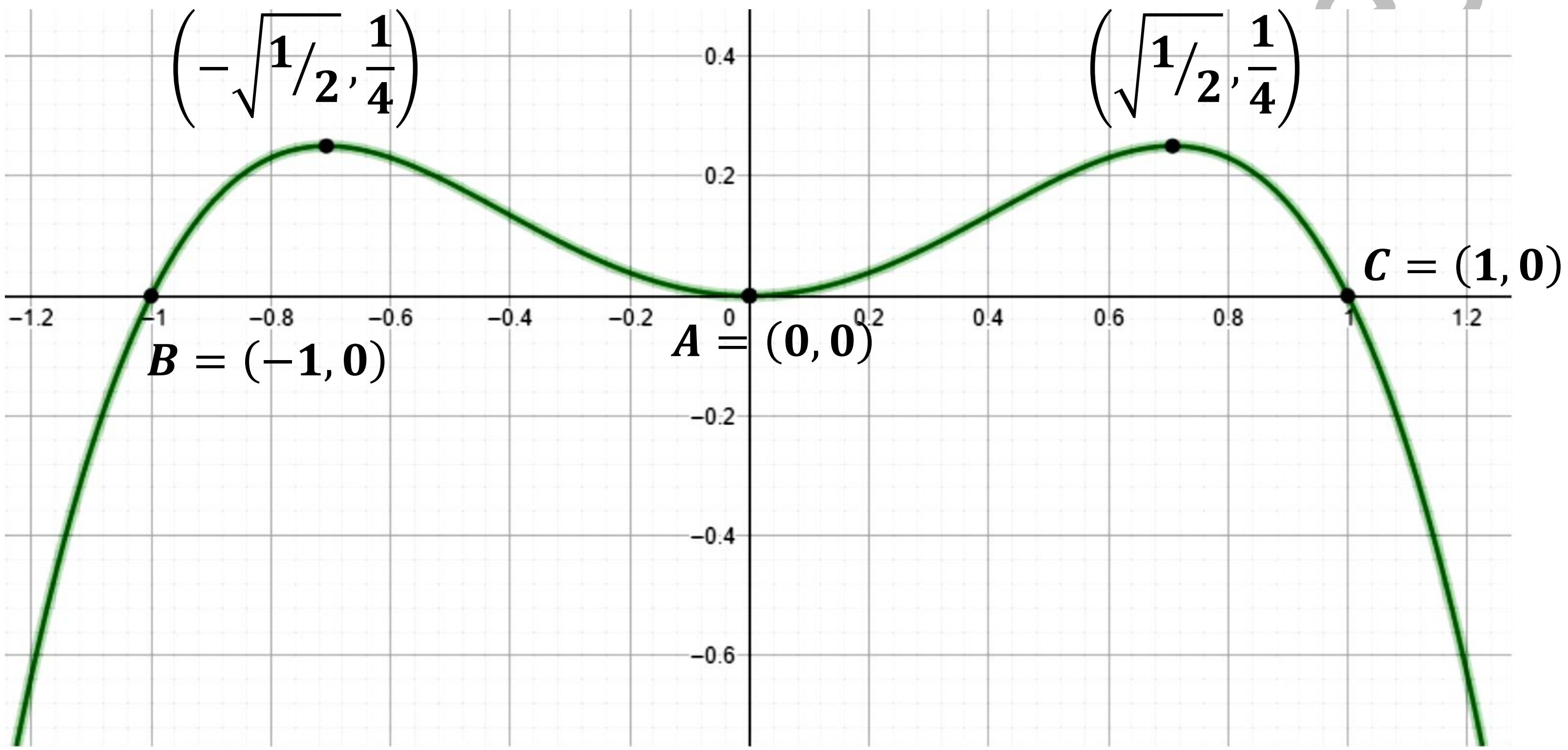
$$f\left(\sqrt{1/2}\right) = -\left(\sqrt{1/2}\right)^4 + \left(\sqrt{1/2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{\left(\sqrt{1/2}, \frac{1}{4}\right) \textit{ es máximo relativo}}$$

$$f(0) = -(0)^4 + (0)^2 = 0 + 0 = 0 \qquad \boxed{(0,0) \textit{ es mínimo relativo}}$$

Ejercicio 4

Dada la función f(x)= $-x^4 + x^2$

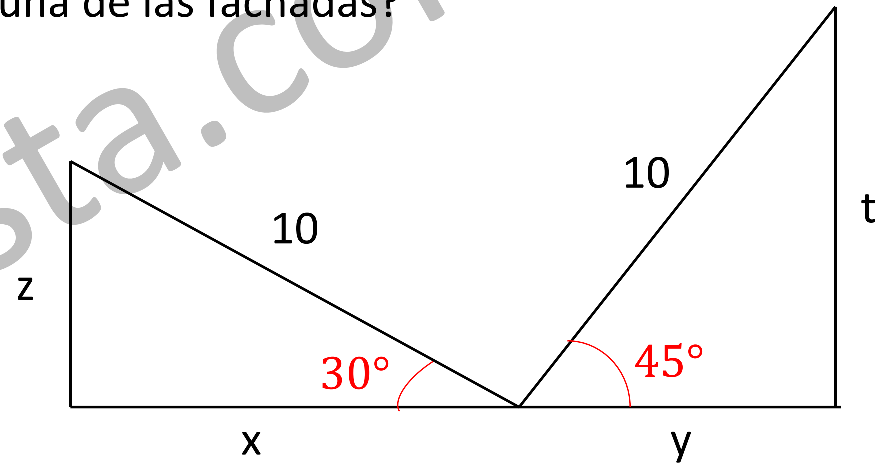
a) Calcular los puntos de corte con los ejes.
b) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Calcular sus máximos y mínimos.
d) Representar gráficamente su función.



Ejercicio 5

Una escalera de bomberos de 10 metros de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30°. Halla la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

Solución:



Se hace un esquema de la situación.

Se aplican las definiciones de las razones trigonométricas.

$$cos(30°) = \frac{x}{10} \longrightarrow x = 10 \cdot \cos(30°) = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 8'66\ m$$

$$cos(45°) = \frac{y}{10} \longrightarrow y = 10 \cdot \cos(45°) = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 7'07\ m$$

$$sen(30°) = \frac{z}{10} \longrightarrow z = 10 \cdot sen(30°) = \frac{10 \cdot 1}{2} = 5\ m$$

$$sen(45°) = \frac{t}{10} \longrightarrow t = 10 \cdot sen(45°) = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 7'07\ m$$

La anchura de la calle es: $A = x + y = 8'66 + 7'07 \approx \boxed{\mathbf{15'73\ m}}$

Las alturas que alcanza la escalera son: **$5\ m$ y $7'07\ m$**