PRUEBA DE ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

ANDALUCÍA

MATEMÁTICAS
JUNIO 2017

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

Teorema de Rouché. Sistemas de ecuaciones.

Probabilidad. Distribución binomial.

Estadística bidimensional.

Trigonometría.

Funciones.

Ejercicio 1

Un alumno para encontrar la solución de un problema plantea el siguiente sistema: $\begin{cases} 2a+b-c=3 \\ a-b+c=-1 \\ a+2b-2c=0 \end{cases}$

A. Demuestra mediante el Teorema de Rouché que el planteamiento no puede ser correcto pues no tiene solución.

B. Si eliminamos la última ecuación y prescindimos de la variable c, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones. Calcula su solución.

Solución: Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A. Para ello calculo su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4-2+1-1+2-4 = 0 \rightarrow Ran(A) < 3$$

Para poder calcular el rango necesito calcular un menor y comprobar que es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow Ran(A) = 2$$

Ejercicio 1

$$\begin{cases} 2a + b - c = 3 \\ a - b + c = -1 \\ \cancel{a + 2b - 2c = 0} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow Ran(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cancel{-1} & 3 \\ 1 & -1 & \cancel{1} & -1 \\ 1 & 2 & \cancel{-2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 1 + 3 - 0 + 4 = 12 \neq 0 \rightarrow Ran(A^*) = 3$$

Ahora se debe calcular el rango de la matriz ampliada. Para ello se orla una columna y se calcula el determinante. En este caso he orlado la tercera columna.

Se verifica por lo tanto que $Ran(A) \neq Ran(A^*)$, lo cual implica, según el teorema de Rouché que **el sistema dado es incompatible**, por ello el sistema propuesto no tiene solución.

B. Si eliminamos la última ecuación y prescindimos de la variable c, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones. Calcula su solución.

$$\begin{cases} 2a + \cancel{b} = 3 \\ a - \cancel{b} = -1 \end{cases}$$

$$3a = 2$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Aplico el método de reducción. Sumo las ecuaciones. Calculo b de la segunda ecuación.

$$\frac{2}{3} - b = -1 \longrightarrow \frac{2}{3} + 1 = b \longrightarrow \boxed{b = \frac{5}{3}}$$

Ejercicio 2

El prospecto de un fármaco dice que puede causar efectos secundarios en 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, las autoridades sanitarias eligen al azar a 20 pacientes a los que suministran el fármaco.

A. Averigua la probabilidad de que ningún paciente tenga efectos secundarios.

B. Calcula la probabilidad de que tengan efectos secundarios menos de 3 pacientes.

Solución: Llamamos X a la variable aleatoria discreta que expresa el número de pacientes con efectos secundarios, y se distribuye según una binomial de parámetros n=20 y p=0'03.

La probabilidad de que ningún paciente tenga efectos secundarios es:

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot 0'97^{20}\cdot 0'03^{0} \longrightarrow P(X=0)=1\cdot 0'97^{20}\cdot 1\approx 0'5438$$

La probabilidad de que ningún paciente tenga efectos secundarios es 0'5438.

La probabilidad de que tengan efectos secundarios menos de 3 pacientes es: $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

Calculo las probabilidades que faltan; P(X=1) y P(X=2):

$$P(X=1)=\binom{20}{1}\cdot 0'97^{19}\cdot 0'03^{1} \longrightarrow P(X=1)=20\cdot 0'97^{19}\cdot 0'03\approx 0'3364$$

$$P(X=2)=\binom{20}{2}\cdot 0'97^{18}\cdot 0'03^{2} \longrightarrow P(X=2)=195\cdot 0'97^{18}\cdot 0'03^{2}\approx 0'0988$$

Calculo la probabilidad pedida: $P(X<3)=0'5438+0'3364+0'0988=0'979$

La probabilidad de que tengan efectos secundarios menos de 3 pacientes es 0'979.

Ejercicio 3

Se ha determinado que entre las horas de sueño de los habitantes de una población y el número de hermanos que tienen, no existe relación. Si consideramos la distribución bidimensional que relaciona ambas variables:

A. Indica razonadamente cuál sería el coeficiente de correlación lineal de Pearson.

B. A partir del resultado anterior, averigua cuánto vale la covarianza de la distribución.

C. Si la media de las horas de sueño es de 7,2 y la del número de hermanos 2,3. Calcula las rectas de regresión.

D. Representa dichas rectas e indica qué posición tienen en el plano.

Solución:

Cuando en una distribución bidimensional, las distribuciones marginales no guardan relación el coeficiente de correlación es Pearson vale 0. r=0.

La relación entre r y la covarianza es: $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \longrightarrow 0 = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \longrightarrow s_{xy} = 0$

$\boxed{\text{La covarianza también vale 0.}}$

La recta de regresión de Y sobre X es: $y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \longrightarrow y - 2'3 = \cancel{\dfrac{0}{s_x^2} \cdot (x - 7'2)} \longrightarrow y = 2'3$

La recta de regresión de X sobre Y es: $x - \bar{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2} \cdot (y - \bar{y}) \longrightarrow x - 7'2 = \cancel{\dfrac{0}{s_y^2} \cdot (y - 2'3)} \longrightarrow x = 7'2$

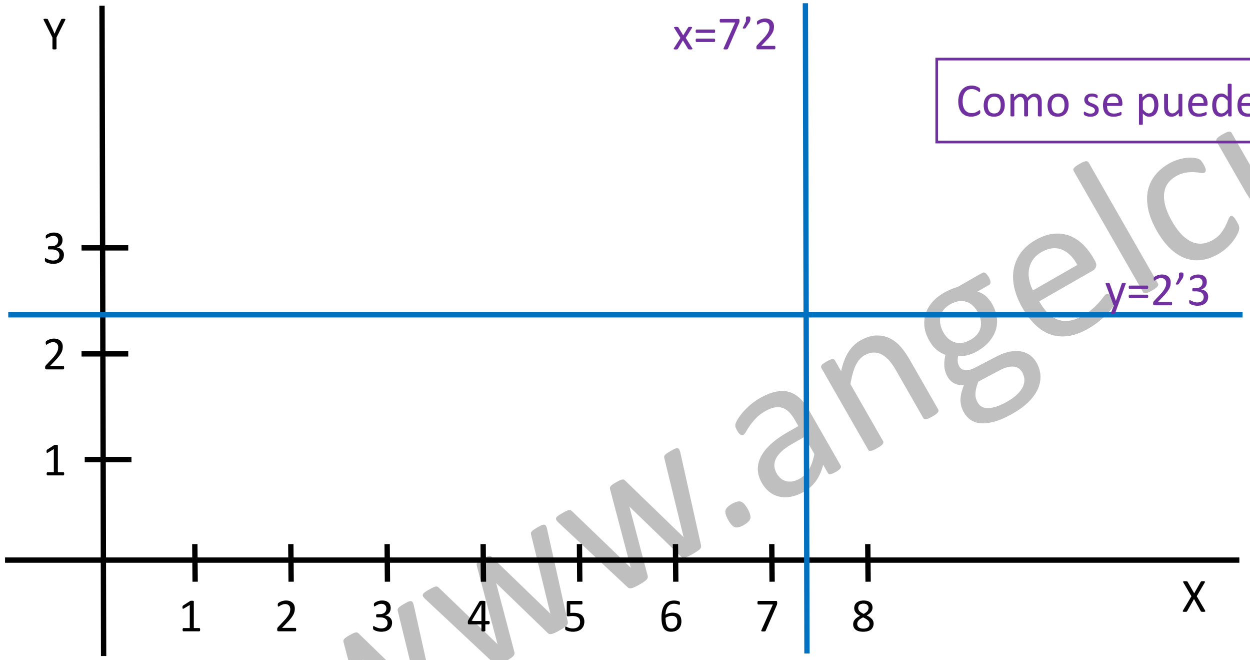
$\boxed{\text{Las rectas de regresión son: } y=2'3 \text{ y } x=7'2.}$

Ejercicio 3

D. Representa dichas rectas e indica qué posición tienen en el plano.

Para representar la recta $y=2'3$, basta con trazar una línea horizontal en ese valor del eje Y.

Para representar la recta $x=7'2$, basta con trazar una línea vertical en ese valor del eje X.



Como se puede observar las rectas son **perpendiculares** entre ellas.

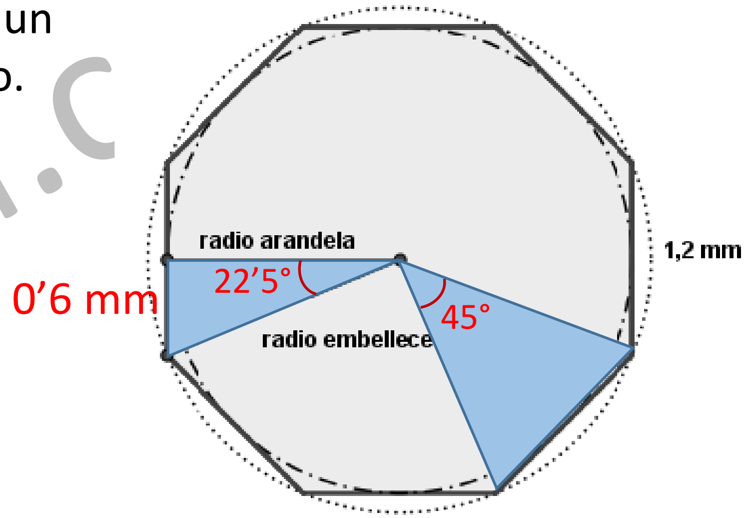
Ejercicio 4

Un mueble contiene tornillos con cabeza octogonal de lado 1,2 mm. Además de los tornillos, necesitamos una arandela, y un embellecedor de forma circular que tape el tornillo de manera que ambas piezas sean lo más pequeñas posible.

Ayuda: Para resolver este problema debemos recordar que el ángulo central de un polígono regular se obtiene dividiendo 360º entre el número de lados del polígono.

A. Calcula el radio de la arandela (coincide con la apotema del octógono).

B. Averigua el radio del embellecedor.



Solución:

En primer lugar, calculo el ángulo del triángulo cuya base es un lado del octógono.

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45° \longrightarrow \beta = \frac{45°}{2} = 22'5°$$

Si se divide en dos parte iguales el triángulo, el ángulo también será la mitad. Y lo mismo pasa con el cateto.

Utilizo las razones trigonométricas para calcular los radios pedidos.

$$\tan(22'5°) = \frac{0'6}{r_a} \longrightarrow r_a = \frac{0'6}{\tan(22'5°)} \longrightarrow r_a = 1'46\ mm$$

$$\mathrm{sen}(22'5°) = \frac{0'6}{r_e} \longrightarrow r_e = \frac{0'6}{\mathrm{sen}(22'5°)} \longrightarrow r_e = 1'58\ mm$$

La arandela tiene un radio de **1’46 mm** y el embellecedor de **1’58 mm**.

Ejercicio 5

Observa la siguiente tabla que relaciona dos variables:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	8	27	64

A. Halla la expresión analítica que relaciona las dos variables.

Este apartado hay que hacerlo por intuición. Se debe observar que estamos elevando al cubo cada valor de x. Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) = x^3}$$

B. A partir de la expresión anterior, completa la siguiente tabla de valores:

x	−1	−2	−3
f(x)	**−1**	**−8**	**−27**

C. Indica de qué tipo de función se trata y si presenta alguna simetría.

Se trata de una función polinómica de grado 3.

Para estudiar la simetría, se calcula −f(x) y f(−x). $-f(x) = -x^3$ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Como $f(-x) \neq f(x)$, la función NO presenta simetría par.

$\boxed{\text{Como } f(-x) = -f(x)\text{, la función PRESENTA simetría impar.}}$

Ejercicio 5

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	8	27	64

D. Representa gráficamente la función.

Coloco algunos de los puntos de los que dispongo. Y con ellos realizo la representación gráfica.

x	−1	−2	−3
f(x)	**−1**	**−4**	**−8**