Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Junio 2022

Problema 1

Álgebra matricial

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Álgebra matricial. Matriz inversa.
2) Método de inducción.

Herramientas utilizadas:

1) Matrices y determinantes.

Problema 1

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla.

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad.

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n

Solución:

Para que una matriz tenga inversa debe ser regular. Debe ser cuadrada y su determinante debe ser distinto de cero.

Se calcula el valor de $C - AB^T$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como se puede ver, la matriz es cuadrada. Falta comprobar si su determinante es distinto de cero.

Se el valor del determinante. $|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Se comprueba que la matriz tiene inversa. Continúo con su cálculo en la siguiente diapositiva.

Problema 1

$C - AB^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(C - AB^T) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(C - AB^T)\right)^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{|C - AB^T|}(Adj(C - AB^T))^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\boxed{(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Problema 1

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad.

Se despeja X utilizando las propiedades de las matrices.

$$CX = AB^T X + I \longrightarrow CX - AB^T X = I \longrightarrow (C - AB^T) \cdot X = I \longrightarrow (C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I$$

$$(C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I \longrightarrow I \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \longrightarrow X = (C - AB^T)^{-1}$$

Puesto que ya se ha calculado antes la matriz inversa, ya disponemos de la matriz X.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Problema 1

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n

En el apartado a) se calculo la matriz AB^T. $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

Se aplica el método de inducción. Dicho método de demostración consiste en verificar que se cumple la expresión dada para n=1, y además en demostrar que se verifica para n+1, suponiendo que para n es válida.

Verifico para n=1. $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

Escribo la expresión para n+1. $(AB^T)^{n+1} = 2^{n+1} \cdot I$

La desarrollo la expresión aplicando las propiedades de las matrices y de las potencias.

$$(AB^T)^{n+1} = 2^{n+1} \cdot I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot (AB^T) = 2^{n+1} \cdot I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot (AB^T) = 2^n \cdot 2I \longrightarrow (AB^T)^n \cdot 2I = 2^n \cdot 2I$$

$(AB^T)^n = 2^n I$ Al simplificar, nos queda la expresión que suponemos que es válida, por lo que la expresión queda demostrada por el método de inducción.